

1. Expresa en grados sexagesimales los siguientes ángulos dados en radianes.

a) $\frac{\pi}{6}$; b) $\frac{2\pi}{3}$; c) $\frac{4\pi}{3}$; d) $\frac{5\pi}{4}$; e) $\frac{7\pi}{6}$; f) $\frac{9\pi}{2}$; g) 1,5 ; h) 3,2 ; i) 5 ; j) 2,75

2. Pasa a radianes los siguientes ángulos dados en grados. Exprésalos en función de π y en forma decimal.

a) 40° ; b) 108° ; c) 135° ; d) 240° ; e) 270° ; f) 126° ; g) 72° ; h) 200° ; i) 300°

3. Halla el valor exacto de las siguientes operaciones sin utilizar la calculadora.

a) $5 \cos \frac{\pi}{2} - \cos 0 + 2 \cos \pi - \cos \frac{3\pi}{2} + \cos 2\pi$; b) $5 \operatorname{tg} \pi + 3 \cos \frac{\pi}{2} - 2 \operatorname{tg} 0 + \operatorname{sen} \frac{3\pi}{2} - 2 \operatorname{sen} 2\pi$;
 c) $\frac{2}{3} \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} - 4 \operatorname{sen} \frac{3\pi}{2} + 3 \operatorname{sen} \pi - \frac{5}{3} \operatorname{sen} \frac{\pi}{2}$; d) $\operatorname{sen} \frac{\pi}{4} + \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} + \operatorname{sen} \pi$; e) $\operatorname{sen} \frac{5\pi}{4} + \cos \frac{3\pi}{4} - \operatorname{sen} \frac{7\pi}{4}$;
 f) $\cos \pi - \cos 0 + \cos \frac{\pi}{2} - \cos \frac{3\pi}{2}$; g) $\operatorname{sen} \frac{2\pi}{3} - \cos \frac{7\pi}{6} + \operatorname{tg} \frac{4\pi}{3} + \operatorname{tg} \frac{11\pi}{6}$; h) $\cos \frac{5\pi}{3} + \operatorname{tg} \frac{4\pi}{3} - \operatorname{tg} \frac{7\pi}{6}$;
 i) $\sqrt{3} \cos \frac{\pi}{6} + \operatorname{sen} \frac{\pi}{6} - \sqrt{2} \cos \frac{\pi}{4} - 2\sqrt{3} \operatorname{sen} \frac{\pi}{3}$

4. En cada caso halla, en radianes, dos valores para el ángulo α contenidos en el intervalo $[0, 2\pi)$ tales que:

a) $\operatorname{sen} \alpha = 0,32$; b) $\cos \alpha = 0,58$; c) $\operatorname{tg} \alpha = -1,5$; d) $\operatorname{sen} \alpha = -0,63$

5. Halla las razones trigonométricas (valores exactos) del ángulo 75° sabiendo que $75^\circ = 30^\circ + 45^\circ$.

6. Sabiendo que $\operatorname{sen} x = \frac{3}{5}$ y que $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, calcula, sin hallar previamente el valor de x (valores exactos):

a) $\operatorname{sen} 2x$; b) $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$; c) $\operatorname{sen} \left(x + \frac{\pi}{6} \right)$; d) $\cos \left(x - \frac{\pi}{3} \right)$; e) $\cos \frac{x}{2}$; f) $\operatorname{tg} \left(x + \frac{\pi}{4} \right)$

7. Halla las razones trigonométricas (valores exactos) del ángulo 15° de dos formas, considerando:

a) $15^\circ = 45^\circ - 30^\circ$; b) $15^\circ = \frac{30^\circ}{2}$

8. Sabiendo que $\operatorname{sen} x = \frac{2}{3}$ y que x es un ángulo del primer cuadrante, calcula (valores exactos):

a) $\operatorname{sen} 2x$; b) $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$; c) $\cos(30^\circ - x)$

9. Sabemos que $\cos x = -\frac{3}{4}$ y $\operatorname{sen} x < 0$. Sin hallar el valor de x , calcula (valores exactos):

a) $\operatorname{sen} x$; b) $\cos(\pi + x)$; c) $\cos 2x$; d) $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$; e) $\operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{2} - x \right)$; f) $\cos \left(\pi - \frac{x}{2} \right)$

10. Si $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = 4$ y $\operatorname{tg} \alpha = -2$, halla $\operatorname{tg} 2\beta$ (valor exacto).

11. Resuelve las siguientes ecuaciones trigonométricas, dando las soluciones en el intervalo $[0^\circ, 360^\circ)$:

a) $2 \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x + 1 = 0$; b) $\operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen} x = 0$; c) $2 \cos^2 x - \sqrt{3} \cos x = 0$; d) $\operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x = 1$;

e) $\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = 0$; f) $2 \cos^2 x + \operatorname{sen} x = 1$; g) $3 \operatorname{tg}^2 x - \sqrt{3} \operatorname{tg} x = 0$; h) $\operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{6} - x \right) + \cos \left(\frac{\pi}{3} - x \right) = \frac{1}{2}$;

i) $\operatorname{sen} 2x - 2 \cos^2 x = 0$; j) $\cos 2x - 3 \operatorname{sen} x + 1 = 0$; k) $\operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{4} + x \right) - \sqrt{2} \operatorname{sen} x = 0$; l) $\cos^2 \frac{x}{2} + \cos x - \frac{1}{2} = 0$;

m) $\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} + 1 = \cos x$; n) $2 \operatorname{sen}^2 \frac{x}{2} + \cos 2x = 0$; ñ) $\cos 2x + 3 \operatorname{sen} x = 2$; o) $\operatorname{tg} 2x \cdot \operatorname{tg} x = 1$; p) $2 \operatorname{sen} x = \operatorname{tg} 2x$

12. Demuestra las siguientes identidades trigonométricas:

a) $\frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin(\alpha - \beta)} = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}$; b) $2 \operatorname{tg} x \cos^2 \frac{x}{2} - \sin x = \operatorname{tg} x$; c) $\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - \cos\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) = \cos x$;

d) $\cos \alpha \cos(\alpha - \beta) + \sin \alpha \sin(\alpha - \beta) = \cos \beta$; e) $\frac{\cos(\alpha - \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \frac{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$; f) $\frac{2 \sin \alpha - \sin 2\alpha}{2 \sin \alpha + \sin 2\alpha} = \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}$;

g) $\frac{\cos(a + b) + \cos(a - b)}{\sin(a + b) + \sin(a - b)} = \frac{1}{\operatorname{tg} a}$; h) $\frac{2 \sin \alpha - \sin 2\alpha}{2 \sin \alpha + \sin 2\alpha} = \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}$; i) $\sin 3x = 3 \sin x \cos^2 x - \sin^3 x$;

j) $\cos(\alpha + \beta) \cdot \cos(\alpha - \beta) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \beta$; k) $\sin^2\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) = \sin \alpha \cdot \sin \beta$;

l) $\cos^2\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) - \cos^2\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) = \sin \alpha \cdot \sin \beta$; m) $\sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = \sin \alpha + \cos \alpha$

13. Simplifica al máximo las siguientes expresiones:

a) $\frac{\sin 2\alpha}{1 - \cos^2 \alpha}$ (calcula su valor para $\frac{\pi}{4}$) ; b) $\frac{2 \cos(45^\circ + \alpha) \cos(45^\circ - \alpha)}{\cos 2\alpha}$; c) $\frac{\sin^2 \alpha}{1 - \cos \alpha} \left(1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}\right)$

14. Resuelve las siguientes ecuaciones trigonométricas (dar todas las soluciones positivas y reducidas, tanto en grados como en radianes):

a) $\cos x \cos 2x + 2 \cos^2 x = 0$; b) $\sqrt{3} \sin \frac{x}{2} + \cos x - 1 = 0$; c) $\sin 2x \cos x = 6 \sin^3 x$; d) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right) + \operatorname{tg} x = 1$;

e) $4 \cos 2x + 3 \cos x = 1$; f) $\operatorname{tg} 2x + 2 \cos x = 0$; g) $\sqrt{2} \cos \frac{x}{2} - \cos x = 1$; h) $2 \sin x \cos^2 x - 6 \sin^3 x = 0$;

i) $\sin 3x - \sin x = \cos 2x$; j) $\frac{\sin 5x + \sin 3x}{\cos x + \cos 3x} = 1$; k) $\frac{\sin 3x + \sin x}{\cos 3x + \cos x} = \sqrt{3}$; l) $\sin 3x - \cos 3x = \sin x - \cos x$

15. Resuelve los sistemas siguientes dando las soluciones en grados, correspondientes al primer cuadrante:

a) $\begin{cases} x + y = 120^\circ \\ \sin x - \sin y = \frac{1}{2} \end{cases}$; b) $\begin{cases} \sin^2 x + \cos^2 y = 1 \\ \cos^2 x - \sin^2 y = 1 \end{cases}$; c) $\begin{cases} \sin x + \cos y = 1 \\ x + y = 90^\circ \end{cases}$;

d) $\begin{cases} \sin x + \sin y = \sqrt{3} \\ \cos x + \cos y = 1 \end{cases}$; e) $\begin{cases} \sin^2 x + \cos^2 y = \frac{3}{4} \\ \cos^2 x - \sin^2 y = \frac{1}{4} \end{cases}$; f) $\begin{cases} \cos(x + y) = \frac{1}{2} \\ \sin(x - y) = \frac{1}{2} \end{cases}$

16. Demuestra las siguientes identidades trigonométricas:

a) $\sin x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}$; b) $\cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}$; c) $\operatorname{tg} x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}$

17. En una circunferencia de 16 cm de radio, un arco mide 20 cm. Halla el ángulo central en grados y en radianes.

18. En una circunferencia de 16 cm de diámetro dibujamos un ángulo de 3 rad. ¿Qué longitud tendrá el arco correspondiente?

19. En una determinada circunferencia, a un arco de 12 cm de longitud le corresponde un ángulo de 2,5 radianes. ¿Cuál es el radio de esa circunferencia?

Soluciones

- 30° ; b) 120° ; c) 240° ; d) 225° ; e) 210° ; f) 810° ; g) $85,94^\circ$; h) $183,35^\circ$;
i) $286,48^\circ$; j) $158,56^\circ$
- $\frac{2\pi}{9} \text{ rad} \approx 0,7 \text{ rad}$; b) $\frac{3\pi}{5} \text{ rad} \approx 1,88 \text{ rad}$; c) $\frac{3\pi}{4} \text{ rad} \approx 2,36 \text{ rad}$; d) $\frac{4\pi}{3} \text{ rad} \approx 4,19 \text{ rad}$;
e) $\frac{3\pi}{2} \approx 4,71 \text{ rad}$; f) $\frac{7\pi}{10} \text{ rad} \approx 2,2 \text{ rad}$; g) $\frac{2\pi}{5} \text{ rad} \approx 1,26 \text{ rad}$; h) $\frac{10\pi}{9} \text{ rad} \approx 3,49 \text{ rad}$; i) $\frac{5\pi}{3} \text{ rad} \approx 5,24 \text{ rad}$
- -2 ; b) -1 ; c) 3 ; d) $\frac{\sqrt{2}+2}{2}$; e) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; f) -2 ; g) $\frac{5\sqrt{3}}{3}$; h) $\frac{1}{2} + \frac{2\sqrt{3}}{3}$; i) -2
- $\alpha_1 = 0,33$; $\alpha_2 = 2,82$; b) $\alpha_1 = 0,95$; $\alpha_2 = 5,33$; c) $\alpha_1 = 2,16$; $\alpha_2 = 5,3$; d) $\alpha_1 = 3,82$; $\alpha_2 = 5,6$
- $\text{sen } 75^\circ = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$; $\text{cos } 75^\circ = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$; $\text{tg } 75^\circ = 2 + \sqrt{3}$
- $\text{sen } 2x = -\frac{24}{25}$; b) $\text{tg } \frac{x}{2} = 3$; c) $\text{sen}\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{3\sqrt{3} - 4}{10}$; d) $\text{cos}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{3\sqrt{3} - 4}{10}$;
e) $\text{cos } \frac{x}{2} = \frac{\sqrt{10}}{10}$; f) $\text{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{7}$
- Usando las dos formas indicadas en los apartados a) y b) se obtiene, naturalmente, los mismos valores:

 $\text{sen } 15^\circ = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$; $\text{cos } 15^\circ = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$; $\text{tg } 15^\circ = 2 - \sqrt{3}$
- $\text{sen } 2x = \frac{4\sqrt{5}}{9}$; b) $\text{tg } \frac{x}{2} = \frac{\sqrt{14 - 6\sqrt{5}}}{2} = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$; c) $\text{cos}(30^\circ - x) = \frac{\sqrt{15} + 2}{6}$
- $\text{sen } x = -\frac{\sqrt{7}}{4}$; b) $\text{cos}(\pi + x) = \frac{3}{4}$; c) $\text{cos } 2x = \frac{1}{8}$; d) $\text{tg } \frac{x}{2} = \sqrt{7}$;
e) $\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\frac{3}{4}$; f) $\text{cos}\left(\pi - \frac{x}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4}$
- $\text{tg } 2\beta = -\frac{84}{13}$
- $x = 90^\circ$, $x = 270^\circ$; b) $x = 0^\circ$, $x = 90^\circ$, $x = 180^\circ$; c) $x = 30^\circ$, $x = 90^\circ$, $x = 270^\circ$, $x = 330^\circ$;
d) $x = 90^\circ$, $x = 270^\circ$; e) $x = 45^\circ$, $x = 135^\circ$, $x = 225^\circ$, $x = 315^\circ$; f) $x = 90^\circ$, 210° , $x = 330^\circ$;
g) $x = 0^\circ$, $x = 30^\circ$, $x = 180^\circ$, $x = 210^\circ$; h) $x = 60^\circ$, $x = 300^\circ$; i) $x = 45^\circ$, $x = 90^\circ$, $x = 225^\circ$, $x = 270^\circ$;
j) $x = 30^\circ$, $x = 150^\circ$; k) $x = 45^\circ$, $x = 225^\circ$; l) $x = 90^\circ$, $x = 270^\circ$; m) $x = 0^\circ$;
n) $x = 60^\circ$, $x = 90^\circ$, $x = 270^\circ$, $x = 300^\circ$; ñ) $x = 30^\circ$, $x = 90^\circ$, $x = 150^\circ$;
o) $x = 30^\circ$, $x = 150^\circ$, $x = 210^\circ$, $x = 330^\circ$; p) $x = 0^\circ$, $x = 120^\circ$, $x = 180^\circ$, $x = 240^\circ$
- En este ejercicio no es posible dar las soluciones finales, pues es un ejercicio en el que se requiere hacer demostraciones.
- $\frac{\text{sen } 2\alpha}{1 - \text{cos}^2 \alpha} = \frac{2 \text{cos } \alpha}{\text{sen } \alpha} = 2 \text{ctg } \alpha$. Su valor para $\frac{\pi}{4}$ es 2 ; b) $\frac{2 \text{cos}(45^\circ + \alpha) \text{cos}(45^\circ - \alpha)}{\text{cos } 2\alpha} = 1$;
c) $\frac{\text{sen}^2 \alpha}{1 - \text{cos } \alpha} \left(1 + \text{tg}^2 \frac{\alpha}{2}\right) = 2$

14. a) $x = 68,53^\circ, x = 90^\circ, x = 270^\circ, x = 291,46^\circ$; b) $x = 0^\circ, x = 120^\circ, x = 240^\circ$;
c) $x = 0^\circ, x = 30^\circ, x = 150^\circ, x = 180^\circ, x = 210^\circ, x = 330^\circ$; d) $x = 0^\circ, x = 45^\circ, x = 180^\circ, x = 225^\circ$;
e) $x = 51,34^\circ, x = 180^\circ, x = 308,71^\circ$; f) $x = 90^\circ, x = 210^\circ, x = 270^\circ, x = 330^\circ$; g) $x = 90^\circ, x = 180^\circ$;
h) $x = 0^\circ, x = 30^\circ, x = 150^\circ, x = 180^\circ, x = 210^\circ, x = 330^\circ$;
i) $x = 30^\circ, x = 45^\circ, x = 135^\circ, x = 150^\circ, x = 225^\circ, x = 315^\circ$;
j) $x = 15^\circ, x = 75^\circ, x = 195^\circ, x = 255^\circ$; k) $x = 30^\circ, x = 120^\circ, x = 210^\circ, x = 300^\circ$;
l) $x = 0^\circ, x = 67,5^\circ, x = 157,5^\circ, x = 180^\circ, x = 247,5^\circ, x = 337,5^\circ$
15. a) $x = 90^\circ, y = 30^\circ$; b) $x = 0^\circ, y = 0^\circ$; c) $x = 30^\circ, y = 60^\circ$; d) $x = 60^\circ, y = 60^\circ$;
e) $x = 30^\circ, y = 45^\circ$; f) $x = 45^\circ, y = 15^\circ$
16. En este ejercicio no es posible dar las soluciones finales, pues es un ejercicio en el que se requiere hacer demostraciones.
17. El ángulo central es $\alpha = 1,25 \text{ rad} = 71,62^\circ$.
18. El arco correspondiente tendrá una longitud de 24 cm .
19. El radio de la circunferencia es $r = 4,8 \text{ cm}$.