Sistemas de dos ecuaciones lineales de primer grado con dos incógnitas

Un sistema de dos ecuaciones lineales de primer grado con dos incógnitas tiene la siguiente forma

$$\left\{ \begin{array}{l} Ax+By+C=0 \\ A'x+B'y+C'=0 \end{array} \right. \qquad (1)$$

Ya sabemos que una ecuación lineal de primer grado con dos incógnitas es, desde el punto de vista geométrico, una recta en el plano. En este caso tenemos dos en su forma general:

$$r \equiv Ax+By+C=0 \quad ; \quad s \equiv A'x+B'y+C'=0$$

Las posibles posiciones relativas de dos rectas en el plano son tres: *coincidentes*, *paralelas* y *secantes*.

Si son coincidentes es porque una recta es la misma que la otra salvo un factor numérico, es decir,

$$Ax+By+C=k\left(A'x+B'y+C'\right)=0 \Rightarrow Ax+By+C=kA'x+kB'y+kC'=0 \ , \ k \in \mathbb{R}$$

De aquí se deduce que $A=kA'$, $B=kB'$, $C=kC'$ y despejando k obtenemos una condición para que las dos rectas coincidan:

$$r \equiv s \Leftrightarrow \frac{A}{A'}=\frac{B}{B'}=\frac{C}{C'}$$

En este caso el sistema (1) tiene infinitas soluciones pues las dos rectas, al ser coincidentes, tienen en común todos sus puntos.

Si las dos rectas son paralelas tienen la misma dirección, con lo que los vectores directores de r y s son iguales o proporcionales. Es decir, llamando $\vec{u}$ al vector director de r, y $\vec{v}$ al vector director de s, tenemos que $\vec{u}=k\vec{v}$, donde k es un número real. Pero recordemos que los vectores directores se podían obtener fácilmente de la ecuación general de la recta: $\vec{u}=(-B,A)$ y $\vec{v}=(-B',A')$, con lo que:

$$\vec{u}=k\vec{v} \Leftrightarrow (-B,A)=k\left(-B',A'\right) \Leftrightarrow (-B,A)=\left(-kB',kA'\right) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} -B=-kB' \\ A=kA' \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} k=\frac{B}{B'} \\ k=\frac{A}{A'} \end{array} \right. \Leftrightarrow \frac{A}{A'}=\frac{B}{B'}$$

Así pues para que dos rectas sean paralelas tenemos la siguiente condición:

$$r \,||\, s \Leftrightarrow \frac{A}{A'}=\frac{B}{B'} \neq \frac{C}{C'}$$

En este caso el sistema (1) no tienen ninguna solución (claro: dos rectas paralelas no tienen ningún punto en común, no se cortan en ningún punto).

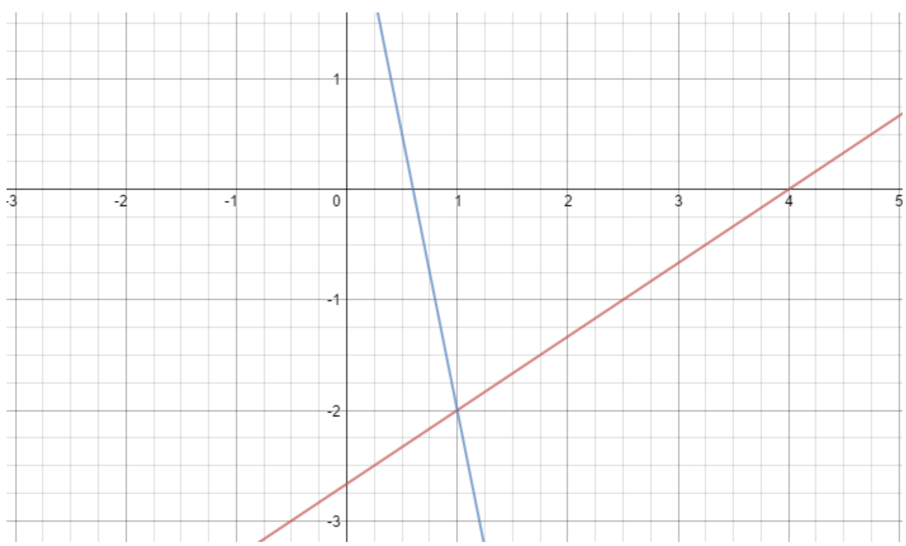
Por último, si las dos rectas son secantes, han de tener distinta dirección, con lo que sus vectores directores no serán proporcionales. Esto nos lleva a la siguiente condición:

$$r \cap s = \{P\} \Leftrightarrow \frac{A}{A'} \neq \frac{B}{B'}$$

En este caso el sistema (1) tienen una única solución. Esta solución es el punto de corte de las rectas r y s: $P\,(a, b)$.

Veamos un ejemplo.

Consideremos el sistema de ecuaciones $\left\{\begin{array}{l} 2x - 3y - 7 = 0 \\ -5x - y + 3 = 0 \end{array}\right.$. Este sistema está formado por las rectas $r \equiv 2x - 3y - 7 = 0$ y $s \equiv -5x - y + 3 = 0$. Como tenemos que $\dfrac{2}{-5} \neq \dfrac{-3}{-1}$, entonces las rectas son secantes. Si queremos saber el punto de corte basta resolver el sistema. Por reducción es muy sencillo. Multiplicando la segunda ecuación por -3 tenemos: $\left\{\begin{array}{l} 2x - 3y - 8 = 0 \\ 15x + 3y - 9 = 0 \end{array}\right.$ y sumando ambas ecuaciones obtenemos $17x - 17 = 0 \Rightarrow x = 1$. Sustituyendo en la primera ecuación podemos despejar y: $2 - 3y - 8 = 0 \Rightarrow -3y - 6 = 0 \Rightarrow y = -2$. Entonces el punto de corte de las rectas es $P\,(1, -2)$.



Puede que ahora sea un buen momento de hablar de *independencia lineal*. Es un concepto muy sencillo. Para ello vamos a pensar en dimensión tres, en un espacio tridimensional como en el que vivimos. Es decir, vamos a fijar un sistema de referencia afín donde cada punto y cada vector tiene tres coordenadas. Este sistema de referencia afín lo podemos escribir así: $R = \{O\,,\,\{\mathrm{i},\mathrm{j},\mathrm{k}\}\}$ donde $\mathrm{i} = (1,0,0)$, $\mathrm{j} = (0,1,0)$ y $\mathrm{k} = (0,0,1)$. Algo así como decir que i mide la anchura, j la profundidad y k la altura. De modo que, por ejemplo, el vector $\vec{u}\,(3,4,2)$ tiene tres unidades de anchura, cuatro de profundidad y dos de altura.

Pues bien, un vector es siempre linealmente independiente y genera una recta (la recta que lo contiene, que es un espacio de dimensión uno). Dos vectores son linealmente independientes si tienen distinta dirección, en cuyo caso generan todo un plano (el plano que los contiene, que es de dimensión dos). Si dos vectores no tienen distinta dirección serán proporcionales (uno se puede poner como el otro multiplicado por un número) y no son linealmente independientes. Tres vectores son linealmente independientes si no están situados en un mismo plano (no coplanarios) y generan todo el espacio, que es de dimensión tres.

¿Qué queremos decir cuando hablamos de que dos vectores linealmente independientes generan el plano que los contiene? Pues que, combinando adecuadamente los dos vectores, podemos llegar a cualquier otro vector del plano.

Veamos un ejemplo. Para ello volvamos a la dimensión dos. Consideremos los vectores $(1,3)$ y $(-2,1)$, que tienen distinta dirección. Por tanto, según hemos definido anteriormente, son linealmente independientes, y generan todo el plano de dimensión dos. Esto quiere decir que cualquier otro vector se puede poner como combinación de ellos. Pensemos, por ejemplo en el vector $(3,-5)$. ¿Podremos llegar a él usando los vectores $(1,3)$ y $(-2,1)$? Es decir, ¿existirán números reales x, y tales que $x\,(1,3) + y\,(-2,1) = (3,-5)$? Seguro que sí. Veamos:

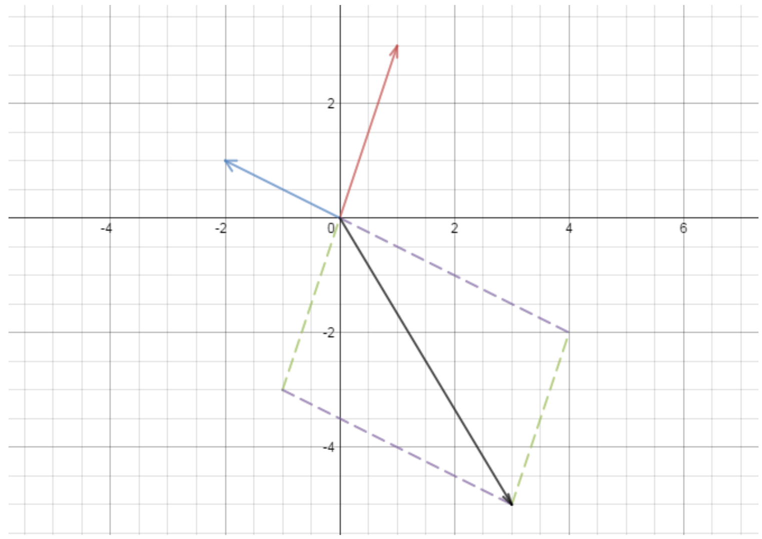
$$x\,(1,3) + y\,(-2,1) = (3,-5) \Leftrightarrow (x,3x) + (-2y,y) = (3,-5) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-2y,3x+y) = (3,-5) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x-2y=3 \\ 3x+y=-5 \end{array} \right.$$

Resolviendo el sistema anterior se obtiene $x=-1$, $y=-2$. Esto quiere decir que si el vector $(1,3)$ lo multiplicamos por -1 (o sea, le cambiamos el sentido), el vector $(-2,1)$ lo multiplicamos por -2 (o sea, lo duplicamos en longitud y le cambiamos el sentido) y, finalmente, sumamos ambos resultados, obtenemos como resultado el vector $(3,-5)$. Esto, en matemáticas, se resume diciendo que el vector $(3,-5)$ se puede poner como *combinación lineal* de los vectores $(1,3)$ y $(-2,1)$:

$$(3,-5) = -1\,(1,3) + (-2)\,(-2,1)$$

Podemos ver el resultado en la figura siguiente:



Si en el sistema $\left\{\begin{array}{l} Ax+By+C=0 \\ A'x+B'y+C'=0 \end{array}\right.$ escribimos los términos independientes en el segundo miembro, lo podemos reescribir así:

$$\left\{\begin{array}{l} a_{11}x+a_{12}y=b_1 \\ a_{21}x+a_{22}y=b_2 \end{array}\right.$$

Una vez escrito así vamos incluso a disponer de una forma más cómoda el sistema. Llamaremos $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ *matriz de los coeficientes* del sistema y $A|b=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \end{pmatrix}$ a la *matriz ampliada* del sistema. No descubrimos nada nuevo si pensamos en una matriz como una disposición de elementos en filas y en columnas. Obsérvese que al escribir la matriz ampliada $A|b$ tenemos completamente definido el sistema sin necesidad de escribir las incógnitas. Ahora, la posición relativa de las dos rectas depende del carácter de la matriz de los coeficientes A y del de la matriz ampliada $A|b$, en el siguiente sentido:
Si las rectas son coincidentes, las filas de la matriz A son proporcionales y las de la matriz $A|b$ también.
Si las rectas son paralelas, las filas de la matriz A son proporcionales, pero no los son las de la matriz $A|b$.
Si las rectas son secantes, las filas de la matriz A no son proporcionales y, por tanto, tampoco lo son los de la matriz $A|b$.
Este carácter de las matrices en matemáticas se conoce con el nombre de rango de una matriz. Hemos de observar que las filas de las matrices las podemos ver como vectores (con dos, tres, cuatro,... coordenadas). Se define el rango de una matriz como el número de filas (vectores) linealmente independientes. Esto nos lleva a reescribir la posición relativa de dos rectas, en función

de los rangos de la matriz de los coeficientes A y de la matriz ampliada $A|b$, del siguiente modo:
Si las rectas son coincidentes, entonces rango$A = $ rango$A|b = 1$.
Si las rectas son paralelas, entonces rango$A = 1 \neq$ rango$A|b = 2$.
Si las rectas son secantes, entonces rango$A = $ rango$A|b = 2$.
Estas ideas se pueden generalizar a un sistema de m ecuaciones y n incógnitas. Según el teorema de Rouché-Frobenius, para que un sistema del tipo anterior tenga solución se ha de cumplir que el rango de la matriz de los coeficientes ha de ser igual al rango de la matriz ampliada: rango$A = $ rango$A|b$. Además, si este número es igual al número de incógnitas n, el sistema tiene solución única (sistema compatible determinado). Sin embargo, si este número es menor que el número de incógnitas, el sistema tiene infinitas soluciones (sistema compatible indeterminado). Por último, si rango$A \neq$ rango$A|b$. el sistema no tiene solución (sistema incompatible).
Seguiremos dándole vueltas a todo esto en un artículo que dedicaremos a los sistemas de ecuaciones lineales de primer grado con tres incógnitas.

$$\left(\frac{x^2}{3} - \frac{x}{5}\right)^2 = \left(\frac{x^2}{3}\right)^2 - 2 \cdot \frac{x^2}{5} \cdot \frac{x}{5} + \left(\frac{x}{5}\right)^2$$