Tasa de variación media. Concepto de derivada

La **tasa de variación media** de una función $y = f(x)$ en un intervalo $[a, b]$, designada $\text{TVM}[a, b]$, es el cociente:

$$\text{TVM}[a, b] = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

La TVM de $f(x)$ en $[a, b]$ es la *pendiente* del segmento que une los puntos $A(a, f(a))$ y $B(b, f(b))$.

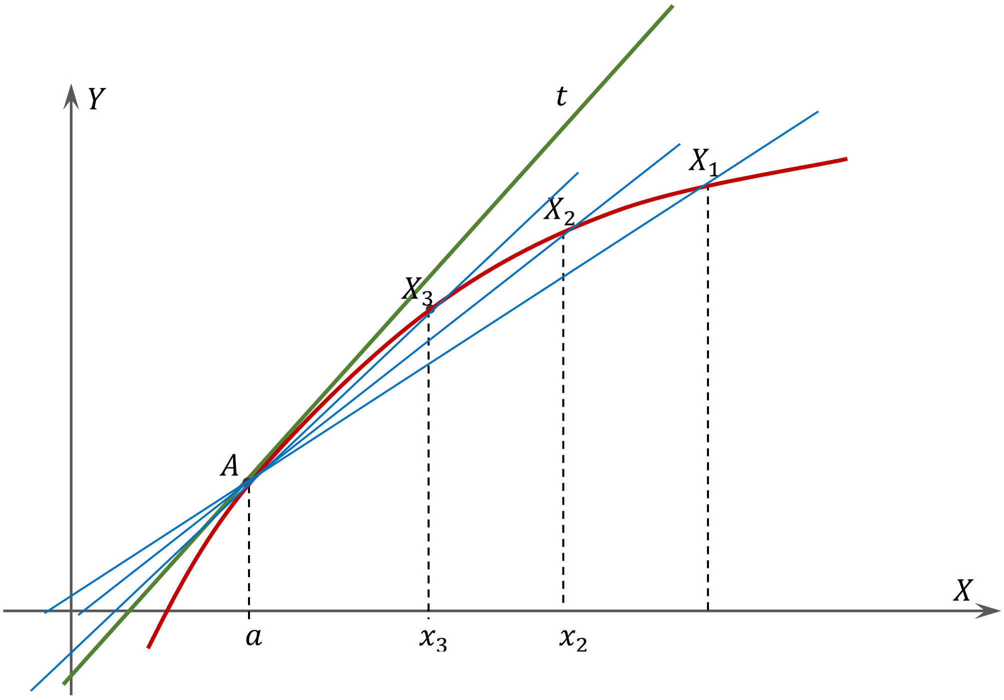
A veces, al intervalo se le designa mediante la expresión $[a, a+h]$ nombrando, así, a un extremo del intervalo, a, y a su longitud, h. En tal caso, la tasa de variación media se obtiene así:

$$\text{TVM}[a, a+h] = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

El crecimiento de una función en un punto viene dado, de forma natural, por el crecimiento (la pendiente) de la recta tangente a la curva en ese punto.

Relación entre el crecimiento en un punto y la TVM

La TVM de una función en un intervalo se interpreta como la pendiente de la cuerda correspondiente.



Si nos fijamos en la figura anterior será $\text{TVM}[a, x_1] =$ pendiente de AX_1; $\text{TVM}[a, x_2] =$ pendiente de AX_2; $\text{TVM}[a, x_3] =$ pendiente de AX_3, etcétera.

La recta tangente, t, se obtiene como límite de las secantes AX_1, AX_2, AX_3,… Por tanto, su pendiente es el límite de las secantes AX_i, cuando $X_i \to A$

Derivada de una función en un punto

El crecimiento de una función en un punto se mide por la **pendiente de la recta tangente** a la gráfica de la función en ese punto. Se obtiene mediante el siguiente límite:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

A este límite, caso de existir y ser finito, se le llama **derivada de f en el punto a** y se designa simbólicamente por $f'(a)$. Si el límite anterior no existe o es $\pm\infty$, se dice que no existe la derivada de f en el punto a, o que f no es derivable en a.

Ejemplos

1. Hallar la derivada de la función $y=-x+3x^2$ en el punto de abscisa $x=-2$.

   Veamos si existe el límite $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$, cuando $a=-2$.

$$\lim_{x\to -2}\frac{f(x)-f(-2)}{x-(-2)}=\lim_{x\to -2}\frac{\left(-x+3x^2\right)-\left(-(-2)+3(-2)^2\right)}{x+2}=\lim_{x\to -2}\frac{-x+3x^2-14}{x+2}=\left[\frac{0}{0}\right]=$$

$$\lim_{x\to -2}\frac{(x+2)(3x-7)}{x+2}=\lim_{x\to -2}(3x-7)=3\cdot(-2)-7=-6-7=-13$$. Por tanto $f'(-2)=-13$.

2. Hallar la derivada de la función $y=\dfrac{2x-3}{x+1}$ en el punto de abscisa $x=1$.

   Veamos si existe el límite $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$, cuando $a=1$.

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{2x-3}{x+1}-\frac{2\cdot 1-3}{1+1}}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{2x-3}{x+1}-\frac{-1}{2}}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{2(2x-3)+(x+1)}{2(x+1)}}{x-1}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{5x-5}{2(x+1)(x-1)}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 1}\frac{5(x-1)}{2(x+1)(x-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{5}{2(x+1)}=\frac{5}{4}$$. Por tanto $f'(1)=\dfrac{5}{4}$.

3. Hallar la derivada de la función $f(x)=\sqrt{x-3}$ en el punto de abscisa $x=5$.

   Veamos si existe el límite $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$, cuando $a=5$.

$$\lim_{x\to 5}\frac{f(x)-f(5)}{x-5}=\lim_{x\to 5}\frac{\sqrt{x-3}-\sqrt{5-3}}{x-5}=\lim_{x\to 5}\frac{\sqrt{x-3}-\sqrt{2}}{x-5}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 5}\frac{\left(\sqrt{x-3}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{x-3}+\sqrt{2}\right)}{(x-5)\left(\sqrt{x-3}+\sqrt{2}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 5}\frac{\sqrt{x-3}^{\,2}-\sqrt{2}^{\,2}}{(x-5)\left(\sqrt{x-3}+\sqrt{2}\right)}=\lim_{x\to 5}\frac{x-3-2}{(x-5)\left(\sqrt{x-3}+\sqrt{2}\right)}=\lim_{x\to 5}\frac{x-5}{(x-5)\left(\sqrt{x-3}+\sqrt{2}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 5}\frac{1}{\sqrt{x-3}+\sqrt{2}}=\frac{1}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{4}$$. Por tanto $f'(5)=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

4. Hallar la derivada de la función $f(x)=x^2-\sqrt{x}$ en el punto de abscisa $x=4$.

   Veamos si existe el límite $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$, cuando $a=4$.

$$\lim_{x\to 4}\frac{f(x)-f(4)}{x-4}=\lim_{x\to 4}\frac{\left(x^2-\sqrt{x}\right)-\left(4^2-\sqrt{4}\right)}{x-4}=\lim_{x\to 4}\frac{x^2-\sqrt{x}-14}{x-4}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 4}\frac{\left(x^2-14-\sqrt{x}\right)\left(x^2-14+\sqrt{x}\right)}{(x-4)\left(x^2-14+\sqrt{x}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{\left(x^2-14\right)^2-\sqrt{x}^{\,2}}{(x-4)\left(x^2-14+\sqrt{x}\right)}=\lim_{x\to 4}\frac{x^4-28x^2+196-x}{(x-4)\left(x^2-14+\sqrt{x}\right)}=\lim_{x\to 4}\frac{(x-4)\left(x^3+4x^2-12x-49\right)}{(x-4)\left(x^2-14+\sqrt{x}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{x^3+4x^2-12x-49}{x^2-14+\sqrt{x}}=\frac{31}{4}$$. Por tanto $f'(4)=\dfrac{31}{4}$.

Función derivada

Supongamos que f es una función y sea A es conjunto de puntos en los que la función f es derivable. Entonces a la función

$$f\,': A \to \mathbb{R}$$
$$x \to y = f\,'(x)$$

se le llama función derivada de f.

Para hallar la función derivada en un punto genérico $x=a$, volvemos a estudiar la existencia del límite

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

Ejemplos

1. Hallar la derivada de la función $f(x)=2x^2-3x+1$ en un punto cualquiera de su dominio $x=a$.

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{(2x^2-3x+1)-(2a^2-3a+1)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{2x^2-3x-2a^2+3a}{x-a}=\left[\frac{0}{0}\right]=$$
$$=\lim_{x\to a}\frac{(x-a)(2x-3+2a)}{x-a}=\lim_{x\to a}(2x-3+2a)=4a-3$$

Por tanto, la derivada en un punto cualquiera $x=a$, es $f\,'(a)=4a-3$. Esto es lo mismo que decir que si $f(x)=2x^2-3x+1$, entonces $f\,'(x)=4x-3$.

2. Hallar la derivada de la función $f(x)=\sqrt{x}$ en un punto cualquiera de su dominio $x=a$.

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to a}\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{a})(\sqrt{x}+\sqrt{a})}{(x-a)(\sqrt{x}+\sqrt{a})}=\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{x}^2-\sqrt{a}^2}{(x-a)(\sqrt{x}+\sqrt{a})}=$$
$$=\lim_{x\to a}\frac{x-a}{(x-a)(\sqrt{x}+\sqrt{a})}=\lim_{x\to a}\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}=\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{a}}=\frac{1}{2\sqrt{a}}$$

Por tanto, la derivada en un punto cualquiera $x=a$, es $f\,'(a)=\frac{1}{2\sqrt{a}}$. Esto es lo mismo que decir que si $f(x)=\sqrt{x}$, entonces $f\,'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$

3. Hallar la derivada de la función $f(x)=\frac{1}{x}$ en un punto cualquiera de su dominio $x=a$.

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{a}}{x-a}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to a}\frac{\frac{a-x}{ax}}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{a-x}{ax(x-a)}=\lim_{x\to a}\frac{-(x-a)}{ax(x-a)}=\lim_{x\to a}\frac{-1}{ax}=-\frac{1}{a^2}$$

Por tanto, la derivada en un punto cualquiera $x=a$, es $f\,'(a)=-\frac{1}{a^2}$. Esto es lo mismo que decir que si $f(x)=\frac{1}{x}$ entonces $f\,'(x)=-\frac{1}{x^2}$.

Utilizando la técnica vista en los ejemplos anteriores se pueden recopilar unas reglas prácticas con las que se puede hallar, muy fácilmente, la derivada de cualquier función elemental. En la siguiente sección se propone una tabla de derivadas y unas reglas elementales de derivación. También se dan las derivadas de las funciones compuestas. Para ello hay que tener en cuenta la siguiente regla, conocida por **derivada de la función compuesta o regla de la cadena**.

$$(f\circ g)'(x)=f\,'(g(x))\cdot g'(x)$$

Tabla de derivadas y reglas de derivación

Tabla de derivadas

Función	Derivada	Función compuesta	Derivada
$y=k$	$y'=0$		
$y=x$	$y'=1$		
$y=x^2$	$y'=2x$		
$y=x^n$	$y'=nx^{n-1}$	$y=\left[f(x)\right]^n$	$y'=n\left[f(x)\right]^{n-1}\cdot f'(x)$
$y=\sqrt{x}$	$y'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$y=\sqrt{f(x)}$	$y'=\dfrac{1}{2\sqrt{f(x)}}\cdot f'(x)=\dfrac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$
$y=\dfrac{1}{x}$	$y'=-\dfrac{1}{x^2}$	$y=\dfrac{1}{f(x)}$	$y'=-\dfrac{1}{\left[f(x)\right]^2}\cdot f'(x)=\dfrac{-f'(x)}{\left[f(x)\right]^2}$
$y=e^x$	$y'=e^x$	$y=e^{f(x)}$	$y'=e^{f(x)}\cdot f'(x)$
$y=a^x$	$y'=a^x\cdot\ln a$	$y=a^{f(x)}$	$y'=a^{f(x)}\cdot\ln a\cdot f'(x)$
$y=\ln x$	$y'=\dfrac{1}{x}$	$y=\ln f(x)$	$y'=\dfrac{1}{f(x)}\cdot f'(x)=\dfrac{f'(x)}{f(x)}$
$y=\log_a x$	$y'=\dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{1}{\ln a}$	$y=\log_a f(x)$	$y'=\dfrac{1}{f(x)}\cdot\dfrac{1}{\ln a}\cdot f'(x)=\dfrac{f'(x)}{f(x)\ln a}$
$y=\operatorname{sen} x$	$y'=\cos x$	$y=\operatorname{sen} f(x)$	$y'=f'(x)\cos f(x)$
$y=\cos x$	$y'=-\operatorname{sen} x$	$y=\cos f(x)$	$y'=-f'(x)\operatorname{sen} f(x)$
$y=\operatorname{tg} x$	$y'=1+\operatorname{tg}^2 x=\dfrac{1}{\cos^2 x}$	$y=\operatorname{tg} f(x)$	$y'=f'(x)\left[1+tg^2\left(f(x)\right)\right]=\dfrac{f'(x)}{\cos^2\left(f(x)\right)}$
$y=\operatorname{arcsen} x$	$y'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$y=\operatorname{arcsen} f(x)$	$y'=\dfrac{f'(x)}{\sqrt{1-\left[f(x)\right]^2}}$
$y=\arccos x$	$y'=\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$y=\arccos f(x)$	$y'=\dfrac{-f'(x)}{\sqrt{1-\left[f(x)\right]^2}}$
$y=\operatorname{arctg} x$	$y'=\dfrac{1}{1+x^2}$	$y=\operatorname{arctg} f(x)$	$y'=\dfrac{f'(x)}{1+\left[f(x)\right]^2}$

Reglas de derivación

	Función	Derivada
Derivada de un número por una función	$y=k\cdot f(x)$	$y'=k\cdot f'(x)$
Derivada de una suma o de una diferencia	$y=f(x)\pm g(x)$	$y'=f'(x)\pm g'(x)$
Derivada de un producto	$y=f(x)\cdot g(x)$	$y'=f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$
Derivada de un cociente	$y=\dfrac{f(x)}{g(x)}$	$y'=\dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{\left[g(x)\right]^2}$
Regla de la cadena	$y=f(g(x))$	$y'=g'(f(x))\cdot f'(x)$

La regla de la cadena viene a decir que si una función está compuesta por varias se va derivando "desde afuera hacia adentro". De tal manera que se deriva la primera función que se observe. Luego se multiplica por la derivada de la función que hay "dentro" de la anterior y así sucesivamente. Observa las dos últimas columnas de la tabla de derivadas.

Ejemplos

1. Si $f(x)=\left(3x^3-2x^2+1\right)^4$

   Derivamos primero la potencia y luego se multiplica por la derivada de la función que "hay dentro".

   $$f'(x)=4\left(3x^3-2x^2+1\right)^3\cdot\left(9x^2-4x\right)$$

2. $f(x)=\sqrt{\ln x}$

   Derivamos primero la raíz y luego el logaritmo.

   $$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{\ln x}}\cdot\frac{1}{x}=\frac{1}{2x\sqrt{\ln x}}$$

3. $f(x)=3^{\sqrt{x}}$

   Derivamos primero la exponencial y luego la raíz.

   $$f'(x)=3^{\sqrt{x}}\cdot\ln 3\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{3^{\sqrt{x}}\cdot\ln 3}{2\sqrt{x}}$$

4. $f(x)=\sqrt{x\cdot\ln x}$

   Derivamos primero la raíz, y luego "lo que hay dentro" de la raíz, que es un **producto** de dos funciones (hemos de utilizar la regla de la derivada de un producto).

   $$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x\cdot\ln x}}\left(1\cdot\ln x+x\cdot\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{2\sqrt{x\ln x}}(\ln x+1)=\frac{\ln x+1}{2\sqrt{x\ln x}}$$

5. $f(x)=\dfrac{e^{3x}}{x^2}$

   Esto es un cociente de funciones, por tanto, se aplica la regla de derivación de un cociente. Observa que la función del numerador es una exponencial de base e, luego su derivada es ella misma multiplicada por la función "de arriba".

   $$f'(x)=\frac{e^{3x}\cdot 3\cdot x^2-e^{3x}\cdot 2x}{\left(x^2\right)^3}=\frac{xe^{3x}(3x-2)}{x^6}=\frac{e^{3x}(3x-2)}{x^5}$$

IMPORTANTE

Es muy importante simplificar el resultado tras derivar, de tal manera que la derivada quede lo más "manejable" posible. Para ello tenemos que aplicar todos los recursos conocidos y que estén a nuestro alcance: operaciones con fracciones, sacar factor común, propiedades de las potencias y de las raíces, racionalizar, propiedades de los logaritmos, etcétera.

6. $f(x)=\sqrt{\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)}$

Se deriva la raíz, luego el logaritmo y por último el cociente $\frac{x}{x+1}$, utilizado la regla de la derivada de un cociente.

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)}}\cdot\frac{1}{\frac{x}{x+1}}\cdot\frac{1\cdot(x+1)-x\cdot 1}{(x+1)^2}=\frac{1}{2\sqrt{\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)}}\cdot\frac{x+1}{x}\cdot\frac{x+1-x}{(x+1)^2}=\frac{1}{2\sqrt{\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)}}\cdot\frac{x+1}{x}\frac{1}{(x+1)^2}=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)}}\cdot\frac{x+1}{x(x+1)^2}=\frac{1}{2\sqrt{\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)}}\cdot\frac{1}{x(x+1)}=\frac{1}{2x(x+1)\sqrt{\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)}}=\frac{1}{x(x+1)(\ln x-\ln(x+1))}$$

7. $f(x)=\operatorname{sen}^2 x\cdot\cos x$

Se trata de un producto de dos funciones. Aplicamos pues la regla de derivación de un producto. Además, el primer factor es $y=\operatorname{sen}^2 x=(\operatorname{sen} x)^2$. Para derivarlo se aplica la regla de la cadena: $y'=2\operatorname{sen} x\cos x$. Por tanto:

$$f'(x)=2\operatorname{sen}x\cos x\cdot\cos x+\operatorname{sen}^2 x\cdot(-\operatorname{sen} x)=2\operatorname{sen}x\cos^2 x-\operatorname{sen}^3 x$$

8. $f(x)=\sqrt{\operatorname{tg} x}$

Derivamos la raíz y luego la tangente.

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{\operatorname{tg} x}}\cdot\left(1+\operatorname{tg}^2 x\right)=\frac{1+\operatorname{tg}^2 x}{2\sqrt{\operatorname{tg} x}}$$

9. $f(x)=\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{x+1}\right)$

Derivamos primero el arcotangente y luego la función $y=\frac{x}{x+1}$, que es un cociente de funciones.

$$f'(x)=\frac{1}{1+\left(\frac{x}{x+1}\right)^2}\cdot\frac{1\cdot(x+1)-x\cdot 1}{(x+1)^2}=\frac{1}{1+\frac{x^2}{(x+1)^2}}\cdot\frac{1}{(x+1)^2}=\frac{1}{\frac{(x+1)^2+x^2}{(x+1)^2}}\cdot\frac{1}{(x+1)^2}=$$

$$=\frac{(x+1)^2}{2x^2+2x+1}\cdot\frac{1}{(x+1)^2}=\frac{1}{2x^2+2x+1}$$

10. $f(x)=\frac{x^2-\cos x}{\ln(x+1)}$

Se trata de un cociente de funciones. Hemos de aplicar la regla de derivación de un cociente.

$$f'(x)=\frac{(2x-(-\operatorname{sen} x))\cdot\ln(x+1)-\left(x^2-\cos x\right)\cdot\frac{1}{x+1}}{\ln^2(x+1)}=\frac{(x+1)(2x+\operatorname{sen} x)\ln(x+1)-x^2+\cos x}{(x+1)\ln^2(x+1)}$$

Recta tangente a una función en un punto

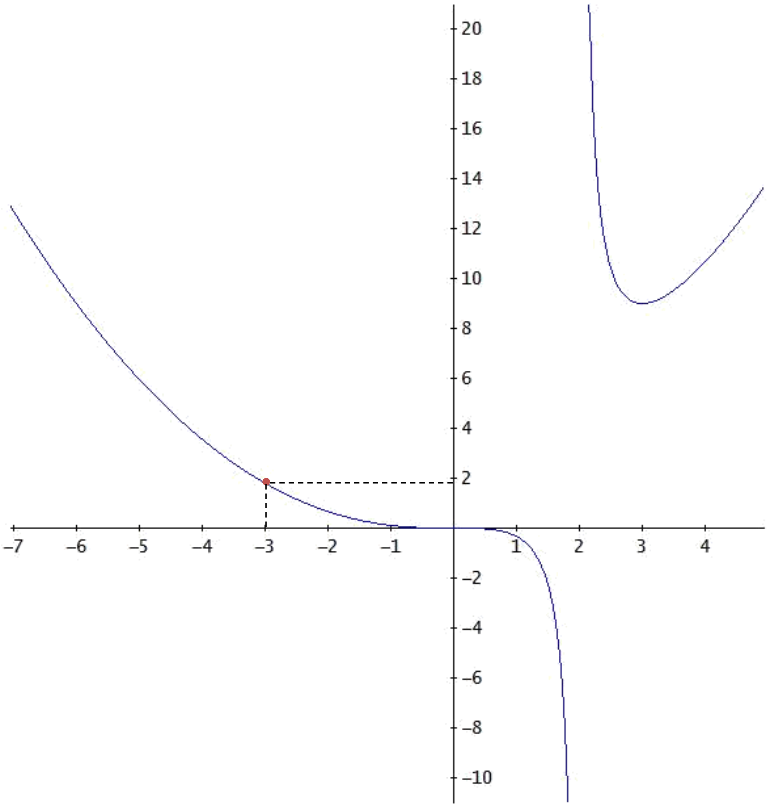
Una de las aplicaciones de las derivadas es la posibilidad de calcular la recta tangente a la gráfica de una función en un punto dado.

En concreto, dada una función f de la cual conozcamos su derivada, y un número real a donde la función esté definida, sabemos que la gráfica de la función pasa por el punto $\left(a,\, f\left(a\right)\right)$. Podremos pues trazar la recta tangente a la gráfica de la función f que pase por el punto $\left(a,\, f\left(a\right)\right)$. Observa la gráfica de la derecha.

Sabemos que una recta tiene ecuación $y=mx+n$, y que al número m se le llama *pendiente* de la recta. Pues bien, la derivada de la función f en a, $f'\left(a\right)$, tiene la propiedad de que es justamente la pendiente de la recta tangente en el punto $\left(a,\, f\left(a\right)\right)$. Además, la ***ecuación de la recta tangente*** es:

$$y-f\left(a\right)=f'\left(a\right)\left(x-a\right)$$

Por ejemplo, supongamos que tenemos la función $f\left(x\right)=\dfrac{x^3}{x-1}$, cuya gráfica es la siguiente:



Si tomamos el número real $a=-3$, observamos que su imagen es $f\left(-3\right)=\dfrac{\left(-3\right)^3}{3\left(-3\right)-6}=\dfrac{-27}{-15}=\dfrac{9}{5}=1{,}8$. O sea, que la gráfica de la función pasa por el punto $\left(a,\, f\left(a\right)\right)=\left(-3,\, 1{,}8\right)$, el cual se ha marcado en la gráfica con un "puntito" algo más grueso. Ahora queremos hallar la recta tangente a la gráfica de la función que pasa por este punto.

Procedemos del siguiente modo:

- Primero, derivamos la función y la simplificamos en la medida de lo posible:

$$f'\left(x\right)=\frac{3x^2\cdot\left(3x-6\right)-x^3\cdot 3}{\left(3x-6\right)^2}=\frac{9x^3-18x^2-3x^3}{\left(3x-6\right)^2}=\frac{6x^3-18x^2}{\left(3x-6\right)^2}=\frac{6x^2\left(x-3\right)}{\left(3x-6\right)^2}$$

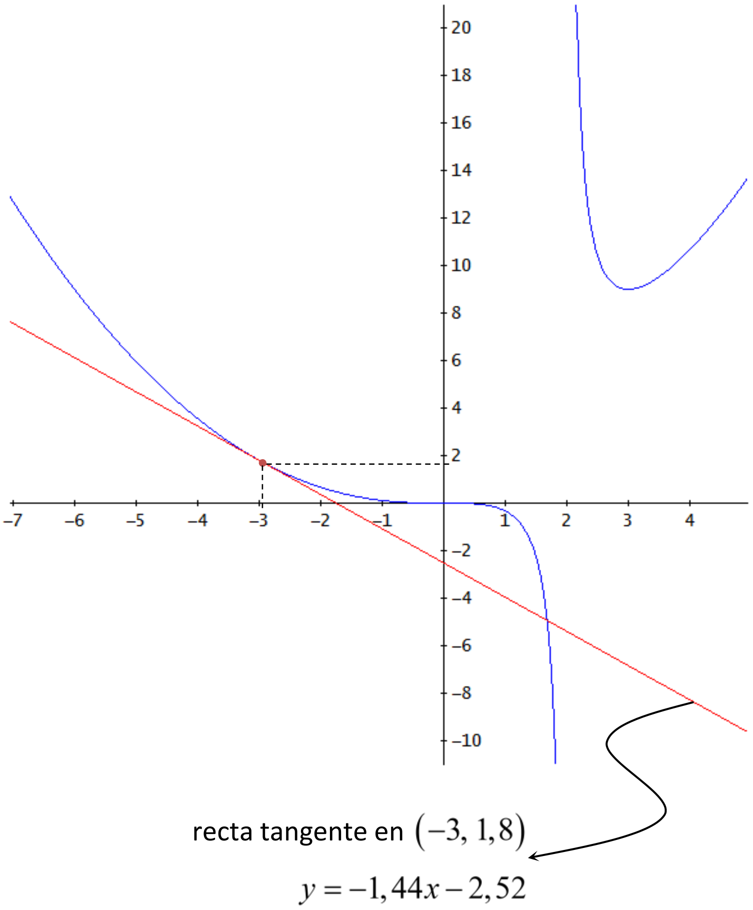
- Ahora hallamos la derivada de f en el punto $a=-3$, es decir, $f'(-3)$:

$$f'(-3)=\frac{6(-3)^3-18(-3)^2}{\left(3(-3)-6\right)^2}=\frac{-162-162}{(-15)^2}=\frac{-324}{225}=-\frac{36}{25}=-1,44$$

- Ahora sustituimos en $y-f(a)=f'(a)(x-a)$, que, recordemos, es la expresión de la recta tangente. En este caso tenemos: $a=-3$, $f(a)=f(-3)=1,8$, $f'(a)=f'(-3)=-1,44$. Entonces:

$$y-1,8=-1,44\left(x-(-3)\right)\Rightarrow y-1,8=-1,44(x+3)\Rightarrow y-1,8=-1,44x-4,32\Rightarrow y=-1,44x-2,52$$

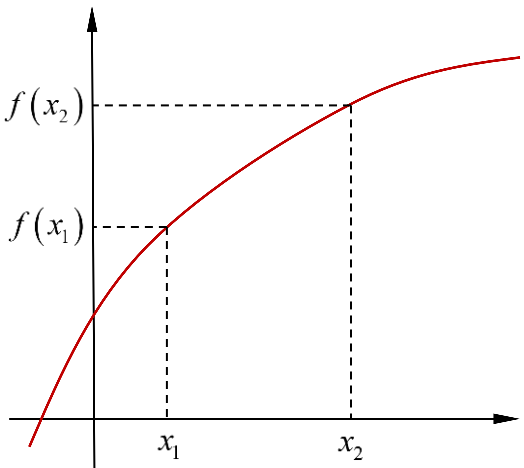
Por tanto la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(-3,\ 1,8)$ es $y=-1,44x-2,52$. Vamos a dibujarla para ver que, efectivamente, esta recta es tangente en $(-3,\ 1,8)$.



Esta aplicación de las derivadas es muy importante. Tratar con ciertos fenómenos en determinadas áreas del conocimiento, que se ajustan a modelos o a funciones más o menos complicadas es bastante común. Además, en ocasiones nos interesa saber qué le ocurre a ese fenómeno en cierto momento o en cierto punto. Podemos hacer aproximaciones válidas utilizando la recta tangente en dicho punto. Basta con observar que, en las cercanías del punto de tangencia, la gráfica de la función se parece mucho a la recta tangente. Tanto que llegan a confundirse. Y la recta, al ser un polinomio de grado uno, es mucho más fácil de tratar que una función cuya expresión matemática siempre será más complicada.

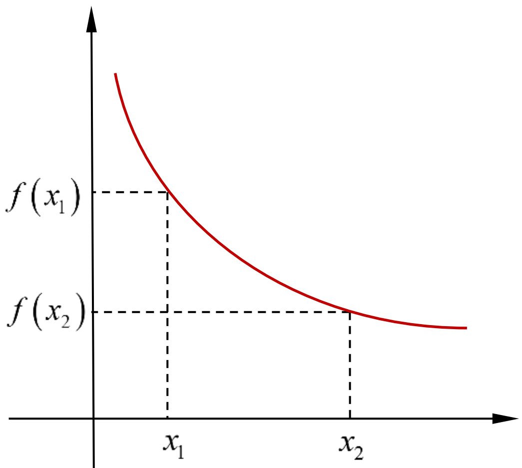
Monotonía y extremos relativos de una función

Las derivadas proporcionan información sobre la ***monotonía*** de una función, es decir, en qué intervalos es creciente o en qué intervalos es decreciente. La idea intuitiva de crecimiento y decrecimiento es muy clara. Formalizarla cuesta algo más: una función f definida en un intervalo es ***estrictamente creciente*** si las imágenes conservan el orden de los originales, y es ***estrictamente decreciente*** si las imágenes invierten el orden de los originales (ver figura).



estrictamente creciente

$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$



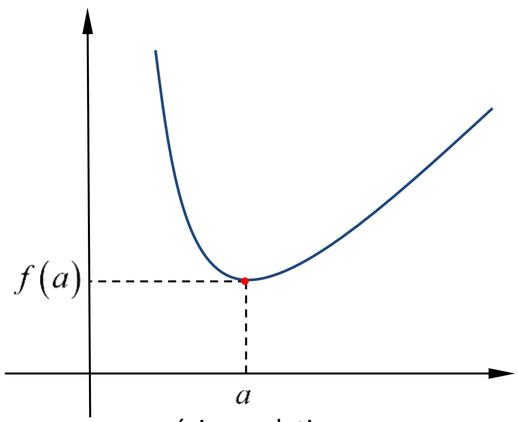
estrictamente decreciente

$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

Se dice que una función es ***constante*** en un intervalo si las imágenes permanecen constantemente iguales en ese intervalo. La gráfica se tratará pues de una recta horizontal. Es decir, la función será de la forma $f(x) = k$, donde k es un número real fijo, para todo x del intervalo mencionado.

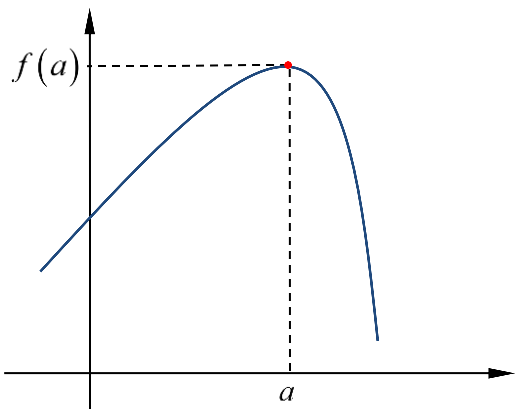
A veces, abusando del lenguaje, diremos que una función es creciente en vez de estrictamente creciente y se denotará simbólicamente con dos flechas hacia arriba: $\uparrow\uparrow$. Del mismo modo diremos que una función es decreciente en vez de estrictamente decreciente y se denotará simbólicamente con dos flechas hacia abajo: $\downarrow\downarrow$.

En los puntos donde la función pase de ser decreciente a creciente diremos que hay un ***mínimo relativo***, y en los puntos donde la función pase de ser creciente a decreciente diremos que hay un ***máximo relativo***. Otra vez, la idea intuitiva de máximo y mínimo es clara, pero hemos de formalizarla desde el punto de vista matemático: una función alcanza en un punto un ***mínimo relativo*** si su imagen es menor o igual que la de todos los puntos de su alrededor, y alcanza un ***máximo relativo*** si su imagen es mayor o igual que la de todos los puntos que están a su alrededor.



mínimo relativo

$f(a) \leq f(x),\ \forall x \in (a-\varepsilon,\ a+\varepsilon)$



máximo relativo

$f(a) \geq f(x),\ \forall x \in (a-\varepsilon,\ a+\varepsilon)$

En el siguiente resultado se pone de manifiesto la relación entre las derivadas y la monotonía y los extremos relativos.

Supongamos que f es una función definida en un intervalo. Entonces:

- Si $f'(x)>0$ en todo punto x del intervalo, entonces f es estrictamente creciente en ese intervalo.
- Si $f'(x)<0$ en todo punto x del intervalo, entonces f es estrictamente decreciente en ese intervalo.
- Si f alcanza un máximo o un mínimo relativo en un punto a del intervalo, entonces $f'(a)=0$.

En la práctica

Para estudiar la monotonía y los extremos relativos de una función f, se procede de la siguiente manera:

a) Se excluyen del estudio los siguientes puntos:
   - Los ***puntos que no pertenecen al dominio de la función*** (puntos de discontinuidad de f, que también lo son de f', pues si una función no es continua en un punto tampoco es derivable en el mismo).
   - Los ***puntos en los que no esté definida la derivada*** (el resto de puntos de discontinuidad de f').
   - Los ***puntos críticos o singulares*** de f, es decir, aquellos que hacen la derivada 0: $x\in\mathbb{R}$ tales que $f'(x)=0$.

b) Se divide la recta real $\mathbb{R}$ en distintos intervalos, separados por los puntos anteriores. Es posible demostrar que en cada uno de estos intervalos el signo de f' no cambia. Por tanto, según el resultado anterior, f es siempre estrictamente creciente, o estrictamente decreciente, en cada uno de ellos.

c) Teniendo en cuenta lo anterior, construimos una tabla donde las columnas serán dichos intervalos y los puntos que los separan. Añadimos una fila para los signos de f' y otra para la monotonía de f.

d) En los puntos que separan los intervalos, si no son puntos de discontinuidad de f, observamos la monotonía de f a la izquierda y a la derecha. Si hay cambio de estrictamente decreciente a estrictamente creciente, o de estrictamente creciente a estrictamente decreciente, tendremos respectivamente un mínimo o un máximo relativo, en dicho punto.

Ejemplo

Como ejemplo estudiaremos la monotonía y los extremos relativos de la función $f(x)=\dfrac{(x+1)^3}{x^2}$.

El dominio de f es $\mathbb{R}-\{0\}$ ya que $x=0$ anula el denominador. Entonces $x=0$ es un punto de discontinuidad de f.

De hecho, en $x=0$ hay una asíntota vertical: $\begin{cases}\displaystyle\lim_{x\to0^+}\frac{(x+1)^3}{x^2}=+\infty\\ \displaystyle\lim_{x\to0^-}\frac{(x+1)^3}{x^2}=+\infty\end{cases}$.

Ahora derivamos la función: $f'(x)=\dfrac{3(x+1)^2x^2-(x+1)^3 2x}{(x^2)^2}=\dfrac{x(x+1)^2(3x-2(x+1))}{x^4}=\dfrac{(x+1)^2(x-2)}{x^3}$.

Observación de importancia

Es ***vital para la existencia humana*** (☺) simplificar adecuadamente la derivada. Para ello se recomienda extraer factor común y expresar, siempre que se pueda, tanto el numerador como el denominador, como producto de factores. Así será siempre mucho más fácil tanto resolver la ecuación $f'(x)=0$, que es la que posibilita extraer los ***puntos críticos o singulares***, como estudiar el signo de la derivada, para conocer el crecimiento o decrecimiento de la función.

Está claro que $x=0$ también es un punto de discontinuidad de f' ya que en este punto no está definida la derivada.

Veamos ahora los puntos que anulan la derivada y así obtendremos los ***puntos críticos o singulares***.

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{(x+1)^2(x-2)}{x^3} \Leftrightarrow (x+1)^2(x-2)=0 \Leftrightarrow \begin{cases}(x+1)^2=0 \Leftrightarrow x+1=0 \Leftrightarrow x=-1\\ x-2=0 \Leftrightarrow x=2\end{cases}$$

Así pues, los puntos obtenidos para dividir la recta real son $x=0$ (que no pertenecía al dominio ni de f ni de f', es decir, ***puntos de discontinuidad de la función y de su derivada***), y estos dos últimos, los ***puntos críticos o singulares***: $x=-1$, $x=2$.

Construimos pues una tabla tal y como se ha explicado en el procedimiento anterior:

	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,0)$	0	$(0,2)$	2	$(2,+\infty)$
f'	$+$	0	$+$	no existe	$-$	0	$+$
f	$\uparrow\uparrow$	no es ni máximo ni mínimo	$\uparrow\uparrow$	no existe	$\downarrow\downarrow$	máximo	$\uparrow\uparrow$

Los signos de la derivada se han obtenido dando un valor cualquiera a f' dentro del intervalo. Así, para el intervalo $(-\infty,-1)$, escogemos un número que pertenezca a dicho intervalo, por ejemplo -2, y evaluamos la derivada en dicho punto: $f'(-2)=\dfrac{(-2+1)^2(-2-2)}{(-2)^3}=\dfrac{1\cdot(-4)}{-8}=\dfrac{-4}{-8}=\dfrac{1}{2}>0$.

Es conveniente destacar que lo importante no es el resultado en sí ($1/2$ en este caso), sino su signo (positivo en este caso, obsérvese que hemos colocado un $+$ en la tabla). Por tanto, como la derivada es positiva, la función es estrictamente creciente ($\uparrow\uparrow$) en el intervalo $(-\infty,-1)$. De la misma forma se procede con el resto de intervalos.

En el punto $x=-1$ no hay ni máximo ni mínimo porque la función es creciente tanto a la izquierda como a la derecha del mismo. Estos son los casos donde la función es probable que cambie de curvatura (se llaman ***puntos de inflexión***).

En el punto $x=2$ hay un máximo relativo porque la función pasa de ser decreciente a ser creciente. Si en la función original f, hallamos el valor numérico para $x=2$ tendremos la coordenada y del máximo relativo:

$$f(2)=\frac{(2+1)^3}{2^2}=\frac{27}{4}=6,75$$

Así pues, las coordenadas del máximo relativo son $(2,\ 6,75)$.

Con estos datos y algunos que ya conoces (cálculo de asíntotas y puntos de corte con los ejes) se puede realizar una muy buena representación gráfica de la función.

Recuerda que ya habíamos obtenido que $x=0$ (el eje Y) es una asíntota vertical (por eso, en la tabla se escribe "no existe" en la columna correspondiente al valor 0).

En este caso, además, la función no tiene asíntotas horizontales pues $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+1)^3}{x^2}=\begin{cases}+\infty & \text{si } x\to+\infty\\ -\infty & \text{si } x\to-\infty\end{cases}$, pero esta información, sin embargo, nos proporciona la tendencia de la función hacia menos infinito y hacia más infinito.

Veamos si hay alguna asíntota oblicua de la forma $y=mx+n$:

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{(x+1)^3}{x^2}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{(x+1)^3}{x^3}=1$$

$$n=\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-mx\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{(x+1)^3}{x^2}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+3x^2+3x+1-x^3}{x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+3x+1}{x^2}=3$$

Por tanto, la asíntota oblicua es $y=x+3$.

Los puntos de corte con los ejes son los siguientes:

- Eje X. Igualamos la imagen a 0: $f(x)=0 \Leftrightarrow \dfrac{(x+1)^3}{x^2}=0 \Leftrightarrow (x+1)^3=0 \Leftrightarrow x+1=0 \Leftrightarrow x=-1$. Por tanto, el punto de corte con el eje X es el $(-1,\ 0)$.

- Eje Y. Tenemos que hallar la imagen para $x=0$. Pero $f(0)=\dfrac{(0+1)^3}{0^2}=\dfrac{1}{0}$ y esto es imposible (recuerda que el dominio de la función f era $\mathbb{R}-\{0\}$. Así pues, no hay puntos de corte con el eje Y.

Con todo lo anterior, la representación gráfica de la función queda de la siguiente manera: