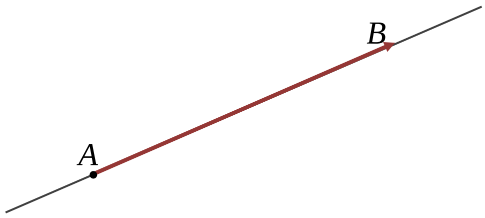
Los vectores y sus operaciones

Un **vector** $\overrightarrow{AB}$ queda determinado por dos puntos, el **origen** A, y el **extremo** B (podemos decir que un vector es un segmento orientado). Un vector queda completamente definido a través de tres elementos: módulo, dirección y sentido.



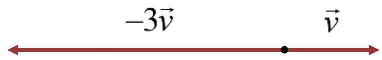
- **Módulo** de un vector es la distancia entre A y B. Se designa poniendo el vector entre barras: $\left|\overrightarrow{AB}\right|$. Digamos que el módulo es a un vector lo que el valor absoluto es a un número real.
- **Dirección** de un vector es la dirección de la recta que lo contiene o en la que se encuentra el vector, así como la de todas sus paralelas.
- **Sentido**. Cada dirección admite, naturalmente, dos sentidos opuestos. En la figura de arriba el vector $\overrightarrow{AB}$ tiene sentido opuesto que el vector $\overrightarrow{BA}$.

Dos vectores son iguales cuando tienen el mismo módulo, la misma dirección y el mismo sentido. Cuando queremos hacer uso de un vector, podemos tomar, en su lugar, cualquiera de los que son iguales a él. Dos vectores iguales también se llaman **equivalentes**. Al conjunto formado por todos los vectores iguales o equivalentes se le llama **vector libre** y se suelen designar así: $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, $\vec{x}$, $\vec{y}$, etcétera . Es decir, si $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A''B''}, \ldots$, son todos vectores iguales, entonces $\vec{v}=\left\{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A''B''}, \ldots\right\}$ es un vector libre. Si decimos que estamos utilizando el vector $\vec{v}$, lo que queremos decir es que estamos utilizando cualquiera de los del conjunto anterior, y lo llamaremos **representante** de la clase.

Hay dos tipos de magnitudes físicas. Unas son las **magnitudes escalares**, en las que para indicar su valor basta con indicar un número y su unidad correspondiente (la masa, el tiempo, el volumen, la temperatura, la densidad, etc.) Sin embargo, otras son **magnitudes vectoriales**, en las que no basta indicar un número (módulo) y una unidad, sino que también habrá que dar información sobre en qué dirección van, y en qué sentido (velocidad, fuerza, aceleración, etc.)

Producto de un número por un vector

Dado un vector $\vec{v}$ y un número real k, $k\vec{v}$ es otro vector que tiene la misma dirección que $\vec{v}$. Si $k>0$, $k\vec{v}$ tiene el mismo sentido que $\vec{v}$; y si $k<0$, $k\vec{v}$ y $\vec{v}$ tienen sentidos opuestos. Además, la relación entre los módulos de $\vec{v}$ y de $k\vec{v}$ es la siguiente: $|k\vec{v}|=|k|\cdot|\vec{v}|$. Dicho de otra manera, el módulo de $k\vec{v}$ es $|k|$ veces el de $\vec{v}$.

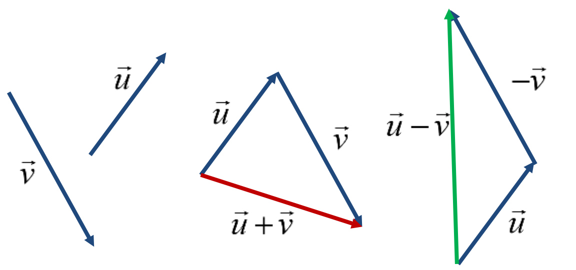


Así, por ejemplo, el sentido del vector $-3\vec{v}$ es opuesto al de $\vec{v}$, y su módulo es tres veces el módulo de $\vec{v}$.

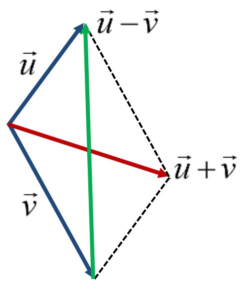
Suma, resta y combinación lineal de vectores

Para sumar dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, se procede del siguiente modo: se sitúa $\vec{v}$ a continuación de $\vec{u}$, de manera que el origen de $\vec{v}$ coincida con el extremo de $\vec{u}$. La suma $\vec{u}+\vec{v}$ es el vector cuyo origen es el de $\vec{u}$ y extremo el de $\vec{v}$.

Para restar dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, $\vec{u}-\vec{v}$, se le suma a $\vec{u}$, el opuesto de $\vec{v}$: $\vec{u}-\vec{v}=\vec{u}+(-\vec{v})$.



Si colocamos $\vec{u}$ y $\vec{v}$ con origen común y completamos un paralelogramo, entonces la diagonal cuyo origen es el de $\vec{u}$ y $\vec{v}$ es el vector suma, $\vec{u}+\vec{v}$. La diagonal que va del extremo de $\vec{v}$ al extremo de $\vec{u}$ es la resta $\vec{u}-\vec{v}$.



Dados dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, y dos números reales a y b, el vector $a\vec{u}+b\vec{v}$ se dice que es una **combinación lineal** de $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

Por ejemplo, $2\vec{u}-3\vec{v}$, $-5\vec{u}+7\vec{v}$, son combinaciones lineales de $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

Coordenadas de un vector

Un importante resultado es que, dados dos vectores $\vec{x}$, $\vec{y}$, con distintas direcciones, cualquier vector $\vec{v}$ se puede poner como combinación lineal de $\vec{x}$ y de $\vec{y}$. Es decir, existen números reales a y b tales que $\vec{v}=a\vec{x}+b\vec{y}$. Además, la combinación lineal anterior es única, o lo que es lo mismo, sólo existen dos números reales a y b para los que es cierta la igualdad anterior.

Base y coordenadas

Se llama **base** del conjunto de los vectores del plano a dos vectores cualesquiera $\vec{x}$ e $\vec{y}$ con distintas direcciones. En este caso la base se denotará así: $B=\{\vec{x},\vec{y}\}$. Si los dos vectores de la base son perpendiculares se dice que forman una **base ortogonal**, y si, además, ambos son unitarios o de módulo 1, se dirá que forman una **base ortonormal**.

Tal y como hemos visto anteriormente, cualquier vector $\vec{v}$ del plano se podrá poner como combinación lineal de los vectores de una base $B=\{\vec{x},\vec{y}\}$ de forma única, es decir, existen números reales a y b tales que $\vec{v}=a\vec{x}+b\vec{y}$. Pues bien, a los números a y b se les llama **coordenadas** de $\vec{v}$ en la base B y escribiremos, para abreviar, $\vec{v}=(a,b)$ o bien $\vec{v}(a,b)$.

Operaciones con coordenadas

Supongamos que $\vec{u}$ y $\vec{v}$ tienen, respecto de una base B, las siguientes coordenadas: $\vec{u}=(u_1,u_2)$, $\vec{v}=(v_1,v_2)$. Entonces:

- Las coordenadas del vector suma, $\vec{u}+\vec{v}$, se obtienen sumando las coordenadas de $\vec{u}$ con las de $\vec{v}$:
$$\vec{u}+\vec{v}=(u_1,u_2)+(v_1,v_2)=(u_1+v_1,u_2+v_2)$$
- Dado un número real k, las coordenadas del vector $k\vec{u}$ (producto de un número por un vector), se obtienen multiplicando por k las coordenadas de $\vec{u}$:
$$k\vec{u}=k(u_1,u_2)=(ku_1,ku_2)$$
- Dados a y b números reales, las coordenadas de una combinación lineal de $\vec{u}$ y $\vec{v}$, $a\vec{u}+b\vec{v}$, se obtienen aplicando lo que se ha visto en los dos puntos anteriores:
$$a\vec{u}+b\vec{v}=a(u_1,u_2)+b(v_1,v_2)=(au_1,au_2)+(bv_1,bv_2)=(au_1+bv_1,au_2+bv_2)$$

Ejemplos

1. Supongamos que $\vec{u}(2,-3)$ y $\vec{v}(5,4)$ son dos vectores respecto de una base B. Calcular las coordenadas de $\vec{u}+\vec{v}$, $-5\vec{u}$ y $3\vec{u}+2\vec{v}$.
   - Las coordenadas de $\vec{u}+\vec{v}$ son: $(2,-3)+(-5,4)=(2+(-5),-3+4)=(-3,1)$.
   - Las coordenadas de $-5\vec{u}$ son: $-5(2,-3)=(-5\cdot 2,-5\cdot(-3))=(-10,15)$.
   - Las coordenadas de $3\vec{u}+2\vec{v}$ son: $3(2,-3)+2(-5,4)=(6,-9)+(-10,8)=(6+(-10),-9+8)=(-4,-1)$.
2. Las coordenadas de $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ respecto de una base B son $\vec{u}(1,-1)$, $\vec{v}(2,3)$ y $\vec{w}(5,15)$. Hallar a y b para que se cumpla que $\vec{w}=a\vec{u}+b\vec{v}$.

   Lo que haremos es expresar la igualdad anterior sustituyendo los vectores por sus coordenadas. Entonces: $(5,15)=a(1,-1)+b(2,3)=(a,-a)+(2b,3b)=(a+2b,-a+3b)$. Igualando las primeras coordenadas entre sí, y las segundas entre sí se puede plantear el sistema $\begin{cases}a+2b=5\\-a+3b=15\end{cases}$. Resolviéndolo tenemos que $a=-3$, $b=4$.

Puntos y vectores en el plano

Sistema de referencia en el plano

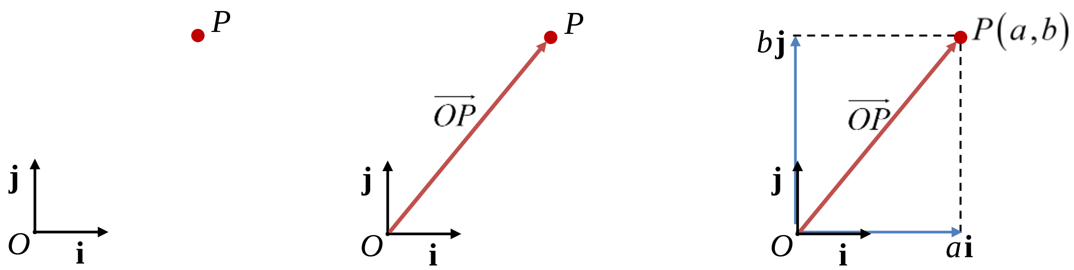
Los vectores son de gran utilidad para la geometría. Vamos a construir, a partir de ellos, un sistema de referencia para expresar analíticamente los puntos. En el tema siguiente también lo utilizaremos para expresar las figuras planas.

Un **sistema de referencia** para el plano consiste en el conjunto $R=\{O,\{\mathbf{i},\mathbf{j}\}\}$ formado por un punto fijo O, llamado **origen**, y por una **base** $\{\mathbf{i},\mathbf{j}\}$ para los vectores. Habitualmente se toma una **base ortonormal** (dos vectores unitarios y perpendiculares). En este caso se habla del sistema de referencia habitual y tenemos que $\mathbf{i}=(1,0)$, $\mathbf{j}=(0,1)$

Entonces, a cada punto P del plano, se le asocia un vector fijo $\overrightarrow{OP}$, llamado **vector de posición** del punto P. Como $\{\mathbf{i},\mathbf{j}\}$ es una base el vector de posición $\overrightarrow{OP}$ tendrá unas coordenadas respecto de la base:

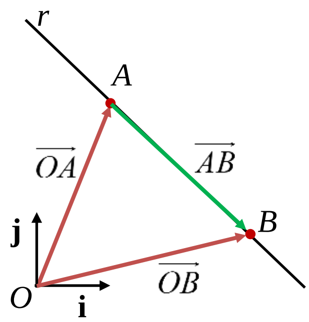
$$\overrightarrow{OP}=ai+bj=a(1,0)+b(0,1)=(a,0)+(0,b)\Rightarrow\overrightarrow{OP}=(a,b)$$

Las coordenadas del vector de posición $\overrightarrow{OP}$ son las mismas que las del punto P: $\overrightarrow{OP}(a,b)\Leftrightarrow P(a,b)$ (véase en la figura siguiente la construcción anterior).



Vector director

Los vectores sirven para marcar las direcciones de las rectas. Un vector paralelo a una recta se dice que es un **vector director** o un **vector de dirección** de ella. Cada recta tiene pues infinitos vectores directores.



Dada una recta r del plano, cada punto suyo tiene su vector de posición correspondiente. Por ejemplo, a un punto A de la recta le corresponde su vector de posición $\overrightarrow{OA}$, a otro punto B de la recta le corresponde su vector de posición $\overrightarrow{OB}$, etcétera. El vector que une el punto A con el punto B, $\overrightarrow{AB}$, sería un vector director de la recta r (ver figura de la derecha). Obsérvese que el vector $\overrightarrow{AB}$ es igual al vector de posición del punto B menos el vector de posición del punto A: $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$.

Coordenadas del vector que une dos puntos

La igualdad anterior nos sirve para hallar las coordenadas del vector que une dos puntos. Como $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$ son vectores de posición deben de tener ambos unas coordenadas: $\overrightarrow{OA}(a_1,a_2)$, $\overrightarrow{OB}(b_1,b_2)$. Por tanto:

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(b_1,b_2)-(a_1,a_2)=(b_1-a_1,b_2-a_2)$$

Así pues las coordenadas del vector $\overrightarrow{AB}$ se obtienen restándole a las coordenadas de B (que son las mismas que las de $\overrightarrow{OB}$) las coordenadas de A (que son las mismas que las de $\overrightarrow{OA}$):

$$A(a_1,a_2)\text{ , }B(b_1,b_2)\Rightarrow\overrightarrow{AB}=(b_1-a_1,b_2-a_2)$$

Así, por ejemplo, el vector que une el punto $P(3,-4)$ con el punto $Q(6,2)$ es $\overrightarrow{PQ}=(6-3,2-(-4))=(3,6)$. También podemos hallar el vector que une Q con P: $\overrightarrow{QP}=(3-6,-4-2)=(-3,-6)$.

Condición para que tres puntos estén alineados

Ya hemos visto que si $A(a_1,a_2)$ y $B(b_1,b_2)$ son dos puntos, el vector $\overrightarrow{AB}=(b_1-a_1,b_2-a_2)$ es un vector director de la recta que los contiene. Si $C(c_1,c_2)$ está alineado con A y B, pertenecerá también a la recta, y ocurrirá que $\overrightarrow{AC}(c_1-a_1,c_2-a_2)$ y $\overrightarrow{BC}(c_1-b_1,c_2-b_2)$ también serán vectores directores de la recta y, por tanto, paralelos a $\overrightarrow{AB}$, lo que significa que los tres vectores han de ser proporcionales, con lo que sus coordenadas deben de formar una proporción:

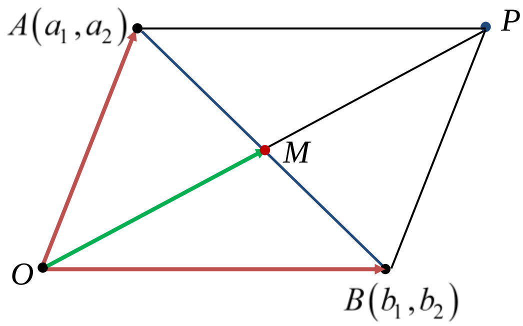
$$\overrightarrow{AB}=k\cdot\overrightarrow{AC}\Rightarrow\frac{b_1-a_1}{c_1-a_1}=\frac{b_2-a_2}{c_2-a_2}\ \ ;\ \ \overrightarrow{AB}=k'\cdot\overrightarrow{BC}\Rightarrow\frac{b_1-a_1}{c_1-b_1}=\frac{b_2-a_2}{c_2-b_2}$$

Un ejercicio típico donde se utiliza lo anterior es el siguiente: averiguar el valor de m para que los puntos $P(1,4)$, $Q(5,-2)$ y $R(6,m)$ estén alineados.

Por lo que hemos visto $\overrightarrow{PQ}=(5-1,-2-4)=(4,-6)$ y $\overrightarrow{PR}=(6-1,m-4)=(5,m-4)$ habrán de ser paralelos y, por tanto, sus coordenadas proporcionales: $\frac{5}{4}=\frac{m-4}{-6}\Rightarrow\frac{-30}{4}=m-4\Rightarrow m=\frac{-30}{4}+4\Rightarrow m=-\frac{14}{4}=\frac{-7}{2}$.

Punto medio de un segmento

Podemos utilizar también los vectores para hallar el punto medio de un segmento. Dado un segmento de extremos $A(a_1,a_2)$ y $B(b_1,b_2)$, tenemos que $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OP}$ es la diagonal del paralelogramo $OAPB$. Como las diagonales de un paralelogramo se cortan en su punto medio M, tenemos (ver figura de la derecha):

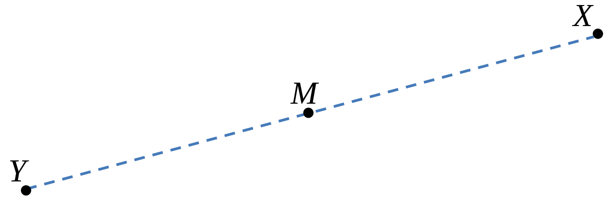


$$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OP}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right)=\frac{1}{2}(a_1+b_1,a_2+b_2)=\left(\frac{a_1+b_1}{2},\frac{a_2+b_2}{2}\right)$$

Por tanto, las coordenadas del punto medio del segmento de extremos $A(a_1,a_2)$ y $B(b_1,b_2)$ son $M\left(\frac{a_1+b_1}{2},\frac{a_2+b_2}{2}\right)$

Simétrico de un punto respecto a otro

Si un punto $X(x_1,x_2)$ es el simétrico de otro punto $Y(y_1,y_2)$ respecto de un punto $M(m_1,m_2)$, entonces M es el punto medio del segmento XY. Por tanto:



$$(m_1,m_2)=\left(\frac{x_1+y_1}{2},\frac{x_2+y_2}{2}\right)\Rightarrow\begin{cases}m_1=\dfrac{x_1+y_1}{2}\\ m_2=\dfrac{x_2+y_2}{2}\end{cases}$$

Despejando x_1 y x_2 se obtienen las coordenadas de X en función de las de Y y las de M.

Por ejemplo, si hemos de hallar el simétrico del punto $A(-6,9)$ respecto del punto $P(4,3)$, lo que hacemos es llamar al simétrico $X(x_1,x_2)$. Entonces $(4,3)=\left(\frac{x_1-6}{2},\frac{x_2+9}{2}\right)\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{x_1-6}{2}=4\Rightarrow x_1=14\\ \dfrac{x_2+9}{2}=3\Rightarrow x_2=-3\end{cases}$. Por tanto, el simétrico del punto A respecto del punto P es $X(14,-3)$.

Producto escalar de vectores

Se llama **producto escalar** de dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ al resultado de multiplicar el módulo de $\vec{u}$, por el módulo de $\vec{v}$ por el coseno del ángulo que forman. Si llamamos α al ángulo que forman $\vec{u}$ y $\vec{v}$, es decir, $\alpha = \measuredangle(\vec{u},\vec{v})$, tenemos:

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}|\cos\alpha$$

Como $|\vec{u}|$, $|\vec{v}|$ y $\cos\alpha$ son números, entonces, $\vec{u}\cdot\vec{v}$ también es un número. De ahí el nombre de producto escalar, pues *escalar* significa número, en contraposición a *vectorial*, que significa vector.

Antes de seguir digamos que el **vector nulo** o **vector cero**, $\vec{0}$, es un vector cuyo origen y extremo coinciden y, por tanto, su módulo es cero. Carece de dirección.

Pues bien, si uno de los dos vectores $\vec{u}$ o $\vec{v}$ es $\vec{0}$, entonces, obviamente, el producto escalar es 0.

Si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son ambos vectores no nulos, para que el producto escalar sea 0 es necesario que $\cos\alpha = 0$, es decir, que $\vec{u}$ y $\vec{v}$ sean perpendiculares: $\vec{u}\perp\vec{v}$. Por tanto, la condición necesaria y suficiente para que el producto escalar de dos vectores no nulos sea igual a 0 es que los vectores sean perpendiculares. Esta es la **propiedad fundamental del producto escalar**.

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = 0 \Leftrightarrow \vec{u}\perp\vec{v}$$

Si el ángulo $\alpha = \measuredangle(\vec{u},\vec{v})$ es agudo, entonces $\cos\alpha > 0$ y, por tanto, $\vec{u}\cdot\vec{v} > 0$. Sin embargo, si el ángulo $\alpha = \measuredangle(\vec{u},\vec{v})$ es obtuso, entonces $\cos\alpha < 0$ y, en este caso, $\vec{u}\cdot\vec{v} < 0$

Propiedades del producto escalar

No son difíciles de demostrar, utilizando la definición de producto escalar, las siguientes propiedades elementales.

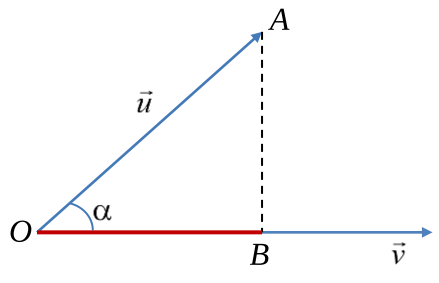
Conmutativa: $\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u}$

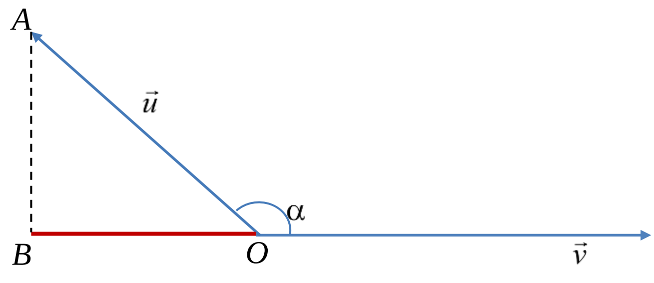
Asociativa u homogénea: $\lambda(\vec{u}\cdot\vec{v}) = (\lambda\vec{u})\cdot\vec{v} = \vec{u}\cdot(\lambda\vec{v})$, $\forall\lambda\in\mathbb{R}$

Distributiva: $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{u}\cdot\vec{w}$

Positiva: $\vec{u}\cdot\vec{u} > 0$, $\forall\vec{u}\neq 0$

El producto escalar y la proyección de vectores





Llamemos OB a la proyección del vector $\vec{u}$ sobre el vector $\vec{v}$ (ver figura). En el triángulo rectángulo OAB se cumple que $OB = OA\cdot\cos\alpha \Rightarrow OB = |\vec{u}|\cdot\cos\alpha$. Entonces $\vec{u}\cdot\vec{v} = |\vec{u}|\,|\vec{v}|\,\cos\alpha = |\vec{v}|OB$, y hemos demostrado la siguiente propiedad:

El producto escalar de dos vectores es igual al módulo de uno de ellos por la proyección del otro sobre él.

Por tanto la proyección OB del vector $\vec{u}$ sobre el vector $\vec{v}$ se obtiene despejando: $OB = \dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{v}|}$.

Expresión analítica del producto escalar en bases ortonormales

Si tomamos $R=\{O,\{\mathbf{i},\mathbf{j}\}\}$ un sistema de referencia ortonormal, es decir, $\{\mathbf{i},\mathbf{j}\}$ es una base ortonormal formada por dos vectores unitarios (de módulo uno) y perpendiculares (ortogonales), tenemos:

$$\mathbf{i}\cdot\mathbf{i}=|\mathbf{i}|\,|\mathbf{i}|\cos 0^{\circ}=1\cdot 1\cdot 1=1 \;\; ; \;\; \mathbf{j}\cdot\mathbf{j}=|\mathbf{j}|\,|\mathbf{j}|\cos 0^{\circ}=1\cdot 1\cdot 1=1 \;\; ; \;\; \mathbf{i}\cdot\mathbf{j}=|\mathbf{i}|\,|\mathbf{j}|\cos 90^{\circ}=1\cdot 1\cdot 0=0$$

Además, si las coordenadas de dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ respecto de la base $\{\mathbf{i},\mathbf{j}\}$ son $\vec{u}(u_1,u_2)$, $\vec{v}(v_1,v_2)$, entonces

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=u_1v_1+u_2v_2$$

Demostración:

Como $\vec{u}(u_1,u_2)$, entonces $\vec{u}=u_1\mathbf{i}+u_2\mathbf{j}$ y $\vec{v}=v_1\mathbf{i}+v_2\mathbf{j}$. Por tanto:

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=(u_1\mathbf{i}+u_2\mathbf{j})\cdot(v_1\mathbf{i}+v_2\mathbf{j})=(u_1v_1)(\mathbf{i}\cdot\mathbf{i})+(u_1v_2)(\mathbf{i}\cdot\mathbf{j})+(u_2v_1)(\mathbf{j}\cdot\mathbf{i})+(u_2v_2)(\mathbf{j}\cdot\mathbf{j})=$$
$$=(u_1v_1)\cdot 1+(u_1v_2)\cdot 0+(u_2v_1)\cdot 0+(u_2v_2)\cdot 1=u_1v_1+u_2v_2$$

Ejemplo

Sean los vectores $\vec{u}(2,-3)$, $\vec{v}(5,4)$ y $\vec{w}(k,7)$. Calculemos $\vec{u}\cdot\vec{v}$ y el valor de k para que $\vec{v}\perp\vec{w}$.

Por un lado, $\vec{u}\cdot\vec{v}=(2,-3)\cdot(5,4)=2\cdot 5+(-3)\cdot 4=10-12=-2$.

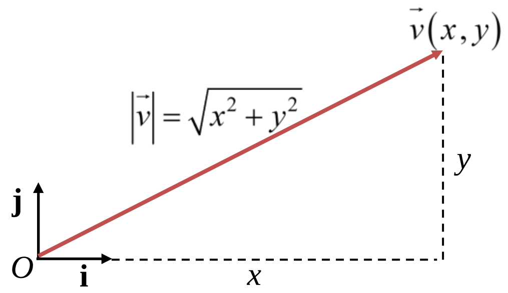
Por otro lado, $\vec{v}\cdot\vec{w}=(5,4)\cdot(k,7)=5\cdot k+4\cdot 7=5k+28$. Como $\vec{v}\perp\vec{w}$, entonces $\vec{v}\cdot\vec{w}=0$, es decir $5k+28=0$, con lo que $k=-\dfrac{28}{5}$

A partir de ahora y en el tema siguiente trabajaremos siempre con sistemas de referencia ortonormales.

Módulo de un vector

Las coordenadas de un vector $\vec{v}(x,y)$ son las medidas de los catetos de un triángulo rectángulo cuya hipotenusa es el módulo de $\vec{v}$. Por tanto (ver figura de la derecha):

$$|\vec{v}|=\sqrt{x^2+y^2}$$



Vamos a deducir esta igualdad a partir del producto escalar:

$$\vec{v}\cdot\vec{v}=|\vec{v}|\cdot|\vec{v}|\cos 0^{\circ}=|\vec{v}|^2\Rightarrow|\vec{v}|=\sqrt{\vec{v}\cdot\vec{v}}=\sqrt{(x,y)\cdot(x,y)}=\sqrt{x^2+y^2}$$

Ángulo de dos vectores

Supongamos que α es el ángulo de dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$: $\alpha=\measuredangle(\vec{u},\vec{v})$. Entonces, despejando: $\cos\alpha=\dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\,|\vec{v}|}$.

Si las coordenadas de estos vectores son $\vec{u}(x_1,y_1)$, $\vec{v}(x_2,y_2)$, entonces $\vec{u}\cdot\vec{v}=x_1x_2+y_1y_2$, $|\vec{u}|=\sqrt{x_1^{\,2}+y_1^{\,2}}$, $|\vec{v}|=\sqrt{x_2^{\,2}+y_2^{\,2}}$. Por tanto: $\cos\alpha=\dfrac{x_1x_2+y_1y_2}{\sqrt{x_1^{\,2}+y_1^{\,2}}\sqrt{x_2^{\,2}+y_2^{\,2}}}$

Ejemplo

Dados los vectores $\vec{u}(2,3)$ y $\vec{v}(5,-1)$, sus módulos son: $|\vec{u}|=\sqrt{2^2+3^2}=\sqrt{13}$, $|\vec{v}|=\sqrt{5^2+(-1)^2}=\sqrt{26}$. Además $\cos\alpha=\dfrac{2\cdot 5+3\cdot(-1)}{\sqrt{13}\cdot\sqrt{26}}=\dfrac{7}{\sqrt{368}}\simeq 0,365\Rightarrow\alpha=68,6^{\circ}$, que es el ángulo que forman los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$.