Examen de Matemáticas – 4º de ESO – Opción B

1. Resuelve las siguientes ecuaciones:

   a) $\dfrac{2(x-2)}{5}-1=\dfrac{3x^2}{4}-2x$ **(1 punto)**

   b) $\dfrac{10}{x^2-4}-\dfrac{5}{x+2}=\dfrac{3}{x-2}-2$ **(1,5 puntos)**

   c) $\sqrt{4-2x}=2-\sqrt{x+2}$ **(1,5 puntos)**

2. Resuelve el siguiente sistema (no lineal) de dos ecuaciones con dos incógnitas **(1,5 puntos)**:

$$\left.\begin{array}{r} x^2-y^2=21 \\ x+y=3 \end{array}\right\}$$

3. Se desea mezclar dos clases de vino de 120 y 180 céntimos el litro. ¿Qué cantidad debemos tomar de cada uno, para obtener 50 litros de mezcla a 162 céntimos el litro? **(1,5 puntos)**

4. Resuelve la siguiente ecuación polinómica **(1 punto)**:

$$x^4-x^3-7x^2+13x-6=0$$

5. Hallar el valor de k para que la división del polinomio $x^4-4x^3+3x^2+kx-4$ entre $x+1$ sea exacta. Para dicho valor de k factorizar el polinomio y decir cuáles son todas sus raíces. **(2 puntos)**

Soluciones:

1. a) $\dfrac{2(x-2)}{5}-1=\dfrac{3x^2}{4}-2x\Rightarrow$ (multiplicando todos los términos por 20) $\Rightarrow$

$\Rightarrow 8(x-2)-20=15x^2-40x\Rightarrow 8x-16-20=15x^2-40x\Rightarrow 15x^2-48x+36=0\Rightarrow$ (dividiendo entre 3) $\Rightarrow 5x^2-16x+12=0$.

El discriminante de esta ecuación es: $\Delta=(-16)^2-4\cdot 5\cdot 12=256-240=16$.

Entonces: $x=\dfrac{16\pm 4}{10}=\begin{cases} x_1=\dfrac{20}{10}=2 \\ x_2=\dfrac{12}{10}=\dfrac{6}{5}\end{cases}$

b) $\dfrac{10}{x^2-4}-\dfrac{5}{x+2}=\dfrac{3}{x-2}-2\Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{10}{(x+2)(x-2)}-\frac{5(x-2)}{(x+2)(x-2)}=\frac{3(x+2)}{(x+2)(x-2)}-\frac{2(x+2)(x-2)}{(x+2)(x-2)}\Rightarrow$$

$\Rightarrow 10-5x+10=3x+6-2x^2+8\Rightarrow 2x^2-8x+6=0\Rightarrow$ (dividiendo entre 2) $\Rightarrow$

$$\Rightarrow x^2-4x+3=0\Rightarrow x=\frac{4\pm\sqrt{(-4)^2-4\cdot 1\cdot 3}}{2\cdot 1}=\frac{4\pm\sqrt{4}}{2}=\frac{4\pm 2}{2}=\begin{cases} x_1=\dfrac{6}{2}=3 \\ x_2=\dfrac{2}{2}=1\end{cases}$$

c) $\sqrt{4-2x}=2-\sqrt{x+2}\Rightarrow\left(\sqrt{4-2x}\right)^2=\left(2-\sqrt{x+2}\right)^2\Rightarrow$

$$\Rightarrow 4-2x=4-4\sqrt{x+2}+x+2\Rightarrow 4\sqrt{x+2}=3x+2\Rightarrow\left(4\sqrt{x+2}\right)^2=(3x+2)^2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 16(x+2)=9x^2+12x+4\Rightarrow 16x+32=9x^2+12x+4\Rightarrow 9x^2-4x-28=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=\frac{4\pm\sqrt{(-4)^2-4\cdot 9\cdot(-28)}}{2\cdot 9}=\frac{4\pm\sqrt{1024}}{18}=\frac{4\pm 32}{18}=\begin{cases} x_1=\dfrac{36}{18}=2 \\ x_2=\dfrac{-28}{18}=\dfrac{-14}{9}\end{cases}$$

2. $\left.\begin{aligned} x^2-y^2&=21 \\ x+y&=3\end{aligned}\right\}$ De la segunda ecuación: $y=3-x$. Sustituyendo en la primera ecuación:

$x^2-(3-x)^2=21\Rightarrow x^2-\left(9-6x+x^2\right)=21\Rightarrow x^2-9+6x-x^2=21\Rightarrow$

$\Rightarrow 6x=30\Rightarrow x=5$. Como $y=3-x\Rightarrow y=-2$.

3. Designando por x e y las cantidades de vino de 120 cts./l y 180 cts./l, respectivamente, como se desean obtener 50 l de mezcla, puede expresarse

$$x+y=50$$

Por otra parte, considerando que el coste de la mezcla es igual a la suma de los costes de los vinos mezclados y que el coste de un vino se obtiene multiplicando la cantidad por el precio, se tiene:

$$120x+180y=50\cdot 162$$

Resolviendo el sistema formado por las dos ecuaciones planteadas:

$$\left.\begin{array}{r} x+y=50 \\ 120x+180y=8100 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y=50 \\ 2x+3y=135 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} -3x-3y=-150 \\ 2x+3y=135 \end{array}\right\} \Rightarrow -x=-15 \Rightarrow x=15$$

Como $x+y=50 \Rightarrow y=50-x \Rightarrow y=50-15=35$

Por tanto debemos mezclar 15 litros de vino de 120 cts./l y 35 litros de vino de 180 cts./l

4. Las posibles raíces del polinomio $x^4-x^3-7x^2+13x-6$ están entre los divisores del término independiente: $Div(-6)=\{\pm 1, \pm 2, \pm -3, \pm 6\}$. Apliquemos la regla de Ruffini:

	1	−1	−7	13	−6
1		1	0	−7	6
	1	0	−7	6	0
1		1	1	−6	
	1	1	−6	0	
2		2	6		
	1	3	0		

Entonces la ecuación $3x^4+x^3-21x^2-25x-6=0$ es equivalente a la ecuación $(x-1)(x-1)(x-2)(x+3)=0$, de donde se obtiene que $x-1=0 \Rightarrow x=1$ (solución doble), $x-2=0 \Rightarrow x=2$, $x+3=0 \Rightarrow x=-3$.

5. Utilizando el teorema del resto:

$P(-1)=0 \Rightarrow 1+4+3-k-4=0 \Rightarrow 4-k=0 \Rightarrow k=4$

Para este valor de k el polinomio es $x^4-4x^3+3x^2+4x-4$. Utilizando la regla de Ruffini:

	1	−4	3	4	−4
−1		−1	5	−8	4
	1	−5	8	−4	0
1		1	−4	4	
	1	−4	4	0	
2		2	−4		
	1	−2	0		

Por tanto la factorización del polinomio es $(x+1)(x-1)(x-2)(x-2)=$

$=(x+1)(x-1)(x-2)^2$ y las raíces del mismo son -1, 1 y 2 (doble).