Ecuaciones lineales con dos incógnitas

Una ecuación lineal con dos incógnitas x e y es una expresión de la forma:

$$a_1x + b_1y = c_1$$

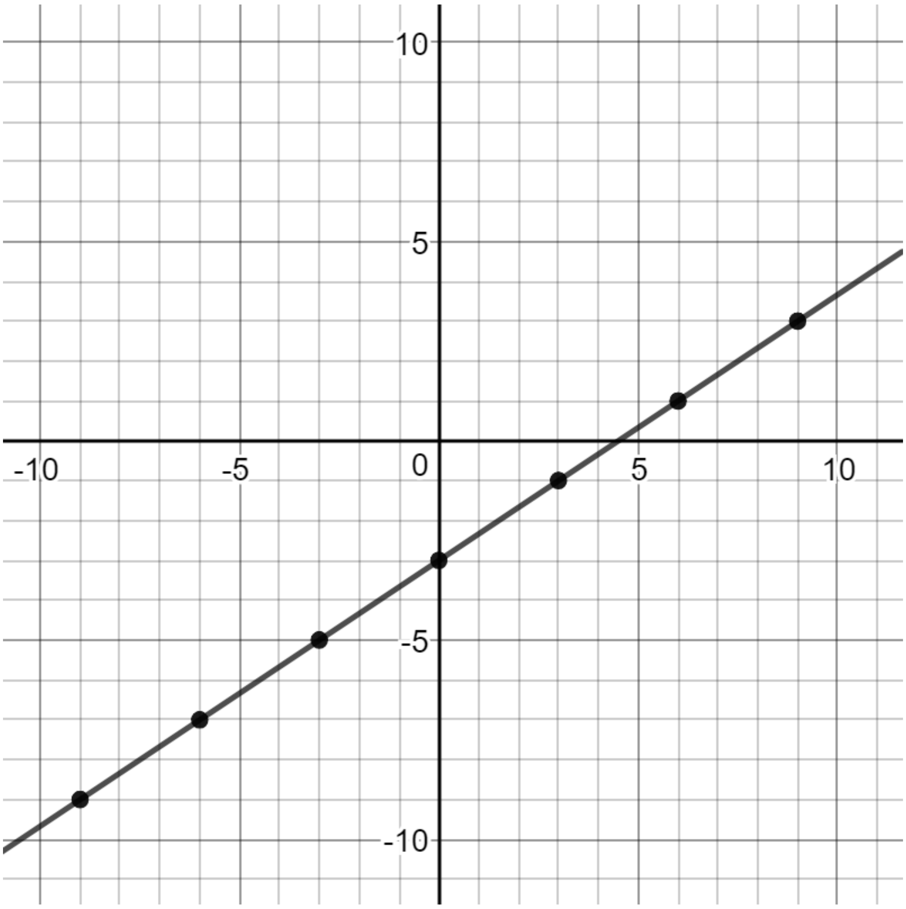
en la que a_1, b_1 y c_1 son números reales.

Desde el punto de vista gráfico, una ecuación lineal con dos incógnitas es una recta. Consideremos por ejemplo la ecuación $2x - 3y = 9$. Si despejamos la incógnita y tenemos: $-3y = -2x + 9 \Rightarrow y = \frac{-2}{-3}x + \frac{9}{-3} \Rightarrow y = \frac{2}{3}x - 3$.

Ahora podemos hacer una tabla de valores. Para confeccionarla damos valores a x en la última expresión para obtener los correspondientes valores de y.

x	-9	-6	-3	0	3	6	9
y	-9	-7	-5	-3	-1	1	3

Observa que hemos dado a x valores múltiplos de 3 para que el valor de y sea también un número entero. Pero podríamos dar a x cualquier otro valor para obtener el correspondiente valor de y. Esta tabla la podemos llevar a unos ejes de coordenadas y representar los puntos correspondientes. Tales puntos están alineados. Si los unimos tenemos la representación gráfica de la ecuación $2x - 3y = 9$, que es una recta.



Concluimos entonces que la representación gráfica de una ecuación lineal con dos incógnitas es una línea recta.

Ejercicio

Representa gráficamente, tal y como se ha hecho en el ejemplo anterior, las siguientes ecuaciones lineales con dos incógnitas.

a) $x - 2y = 1$; b) $-3x + y = -2$; c) $3x + 2y = -5$; d) $-4x - 2y = 6$

Sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas

Si unimos dos ecuaciones lineales con dos incógnitas lo que tenemos es un sistema formado por esas dos ecuaciones. Es decir, tenemos algo que, simbólicamente, quedaría del siguiente modo (***forma reducida del sistema***):

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$$

Tipos de sistemas y posición relativa de dos rectas

Como la representación gráfica de cada una de las ecuaciones de un sistema es una recta, tenemos tres posibilidades:

1) Que las rectas sean ***secantes***, es decir, que las dos rectas se corten en un punto. En este caso el sistema tiene una única solución (se dice también que el sistema es ***compatible determinado***).
2) Que las rectas sean **paralelas**, es decir, que las dos rectas no se corten. En este caso el sistema no tiene ninguna solución (se dice también que el sistema es ***incompatible***).
3) Que las rectas sean ***coincidentes***, es decir, que ambas rectas tengan infinitos puntos en común (en realidad son la misma recta). En este caso el sistema tiene infinitas soluciones (se dice también que el sistema es ***compatible indeterminado***).

Veamos un ejemplo gráfico de los dos primeros casos.

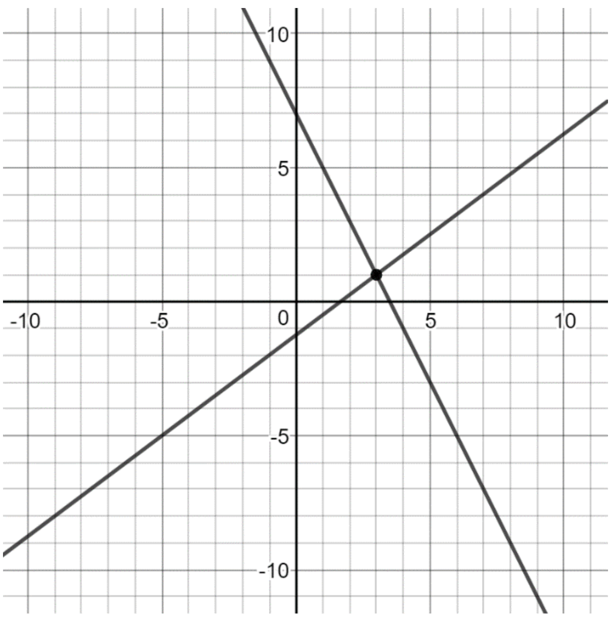
1) Consideremos el sistema $\begin{cases} 3x-4y=5 \\ -2x-y=-7 \end{cases}$.

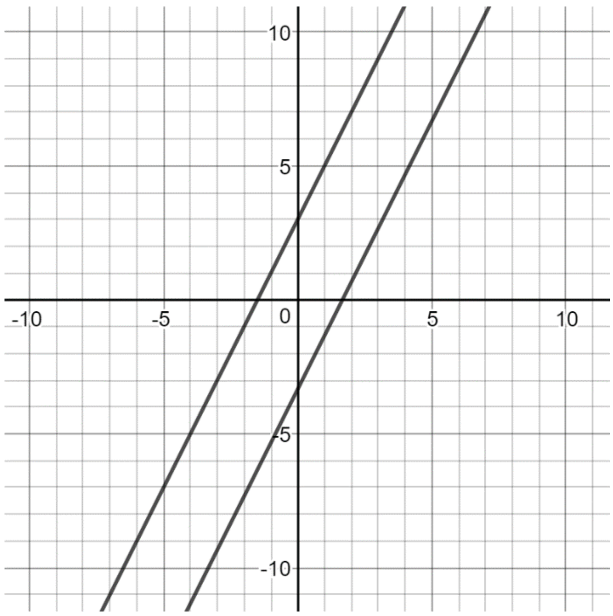
   Si representamos gráficamente ambas ecuaciones usando los mismos ejes de coordenadas obtenemos dos rectas.

   Como se puede observar en la figura de la izquierda, ambas rectas se cortan en un punto que, por cierto, tiene coordenadas $x=3$ e $y=1$. A estos dos valores los llamaremos solución del sistema de ecuaciones. Gráficamente diremos que las dos rectas son secantes y se cortan el punto $(3,1)$.

2) Consideremos este otro sistema: $\begin{cases} 2x-y=-3 \\ -6x+3y=-10 \end{cases}$.

   Si ahora representamos estas dos ecuaciones, también usando los mismos ejes de coordenadas, se comprueba que ambas son paralelas (figura de la derecha). En este caso el sistema no tiene solución, pues no hay ningún punto que sea común a ambas rectas.





Resolución de un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas

Como has podido ver en la sección anterior, cuando dos rectas son secantes tienen un punto en común. Este punto común se puede hallar resolviendo el sistema correspondiente. Resolver un sistema consiste en obtener, mediante algún método o procedimiento, los números reales x e y que hacen que las dos ecuaciones sean ciertas. Tales números reciben el nombre de ***solución del sistema***. Si x e y son una solución del sistema el punto (x, y) es el punto de corte de las dos rectas. Básicamente, existen tres métodos de resolución de sistemas de dos ecuaciones lineales.

Método de sustitución

Consiste en despejar una de las incógnitas de una de las ecuaciones (la incógnita que tú quieras de la ecuación que tú quieras) y posteriormente sustituir su valor en la otra ecuación. Entonces quedará una ecuación de primer grado de las que ya sabes resolver.

Ejemplo 1

Vamos a resolver por este método el sistema del primero de los ejemplos vistos en la página anterior: $\begin{cases} 3x-4y=5 \\ -2x-y=-7 \end{cases}$

Despejaremos la incógnita x de la segunda ecuación: $-2x-y=-7 \Rightarrow -2x=y-7 \Rightarrow x=\dfrac{y-7}{-2}$.

Cuando un denominador aparece negativo es conveniente pasar el signo menos del denominador al numerador. Así tendremos que $x=\dfrac{-(y-7)}{2} \Rightarrow x=\dfrac{-y+7}{2}$. Ahora sustituimos este valor en la primera ecuación y despejamos la incógnita y: $3\left(\dfrac{-y+7}{2}\right)-4y=5 \Rightarrow \dfrac{-3y+21}{2}-4y=5 \Rightarrow -3y+21-8y=10 \Rightarrow -11y=-11 \Rightarrow y=1$. Este valor se sustituye en la expresión $x=\dfrac{-y+7}{2}$ para obtener el valor de x. De este modo: $x=\dfrac{-1+7}{2}=\dfrac{6}{2} \Rightarrow x=3$.

Vamos a usar este mismo método para resolver el mismo sistema, pero en este caso vamos a despejar la incógnita y de la segunda ecuación: $-2x-y=-7 \Rightarrow -y=2x-7 \Rightarrow y=-2x+7$. Al igual que antes, sustituimos este valor en la primera ecuación y despejamos la incógnita x: $3x-4(-2x+7)=5 \Rightarrow 3x+8x-28=5 \Rightarrow 11x=33 \Rightarrow x=3$. Para terminar sustituimos este valor en la expresión $y=-2x+7$, con lo que $y=-2\cdot 3+7=-6+7 \Rightarrow y=1$.

Como se puede observar, podemos despejar de primeras la incógnita que queramos de la ecuación que queramos: el resultado es el mismo. Se aconseja mirar bien el sistema y decidirse por la incógnita más sencilla de despejar de entre las dos ecuaciones. La solución del sistema es $x=3$, $y=1$. Esto, como ya vimos en la página anterior, es tanto como decir que el punto de corte de las rectas $3x-4y=5$ y $-2x-y=-7$ es el punto $(3,1)$.

Método de igualación

Consiste en despejar la misma incógnita de ambas ecuaciones e igualar ambas expresiones. Vuelve a presentarse entonces una ecuación de primer grado de la que despejaremos una de las incógnitas.

Ejemplo 2

Volvamos a resolver el mismo sistema del ejemplo anterior por este nuevo método: $\begin{cases} 3x-4y=5 \\ -2x-y=-7 \end{cases}$

Ya habíamos despejado y de la segunda ecuación obteniendo $y=-2x+7$. Si despejamos y de la primera obtenemos $y=\dfrac{-3x+5}{-4} \Rightarrow y=\dfrac{3x-5}{4}$. Igualando tenemos: $-2x+7=\dfrac{3x-5}{4} \Rightarrow -8x+28=3x-5 \Rightarrow -11x=-33 \Rightarrow x=3$.
Sustituyendo por ejemplo en $y=\dfrac{3x-5}{4}$ tenemos: $y=\dfrac{3\cdot 3-5}{4}=\dfrac{9-5}{4}=\dfrac{4}{4} \Rightarrow y=1$.

Método de reducción

Este método consiste en multiplicar una o las dos ecuaciones por números adecuados para transformar el sistema en otro equivalente de tal forma que, al sumar o restar las dos ecuaciones de este último, una de las dos incógnitas desaparezca. De este modo podremos despejar fácilmente la otra.

Ejemplo 3

Volvamos a resolver el mismo sistema de los dos ejemplos anteriores, $\begin{cases} 3x-4y=5 \\ -2x-y=-7 \end{cases}$, usando ahora este método.

Multipliquemos la primera ecuación por 2 y la segunda ecuación por 3. El sistema queda de la siguiente manera: $\begin{cases} 6x-8y=10 \\ -6x-3y=-21 \end{cases}$. Sumando ambas ecuaciones término a término tenemos: $-11y=-11 \Rightarrow y=1$.

Ahora podríamos sustituir el valor $y=1$ en cualquiera de las dos ecuaciones para despejar la incógnita x. Sin embargo la vamos a obtener volviendo a aplicar el método de reducción. Multipliquemos para ello la segunda ecuación por -4. Obtenemos así el siguiente sistema $\begin{cases} 3x-4y=5 \\ 8x+4y=28 \end{cases}$. Sumando ambas ecuaciones obtenemos $11x=33 \Rightarrow x=3$.

Como vemos, se obtiene la misma solución que si aplicamos cualquiera de los dos métodos anteriores.

Resolución de sistemas que no aparecen en la forma reducida

Un sistema de ecuaciones puede no aparecer inicialmente en su forma reducida, es decir, las incógnitas pueden aparecer conjuntamente alrededor de corchetes, paréntesis y denominadores. Antes de aplicar cualquiera de los tres métodos vistos anteriormente debemos convertir el sistema en otro equivalente que tenga su forma reducida. Para ello aplicamos las técnicas de eliminación de paréntesis y denominadores tal de igual modo que como ya se hizo en la resolución de las ecuaciones de primer grado.

Ejemplo 4

Resolver el sistema $\begin{cases} \dfrac{3(x-2)}{4}+\dfrac{2(y-3)}{5}=\dfrac{2}{5} \\ \dfrac{2(y-4)}{3}+\dfrac{3(x-1)}{2}=\dfrac{3}{2} \end{cases}$.

En primer lugar, eliminamos los paréntesis: $\begin{cases} \dfrac{3x-6}{4}+\dfrac{2y-6}{5}=\dfrac{2}{5} \\ \dfrac{2y-8}{3}+\dfrac{3x-3}{2}=\dfrac{3}{2} \end{cases}$. Ahora multiplicamos cada uno de los términos de ambas ecuaciones por el mínimo común múltiplo de los denominadores de cada una de ellas, es decir, multiplicamos la primera ecuación por 20 y la segunda ecuación por 6: $\begin{cases} 5(3x-6)+4(2y-6)=8 \\ 2(2y-8)+3(3x-3)=9 \end{cases}$. Ahora volvemos a eliminar paréntesis y reducimos términos semejantes. Escribiremos los términos sin incógnita en el segundo miembro de cada igualdad: $\begin{cases} 15x-30+8y-24=8 \\ 4y-16+9x-9=9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 15x+8y-54=8 \\ 9x+4y-25=9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 15x+8y=62 \\ 9x+4y=34 \end{cases}$. Esta última es la forma reducida del sistema. Lo vamos a resolver por reducción. Multipliquemos la segunda ecuación por -2: $\begin{cases} 15x+8y=62 \\ -18x-8y=-68 \end{cases}$. ahora sumamos ambas ecuaciones término a término, con lo que obtenemos $-3x=-6 \Rightarrow x=2$. Sustituyamos este valor, por ejemplo, en la segunda ecuación del sistema dado en su forma reducida para despejar finalmente la incógnita y: $9\cdot 2+4y=34 \Rightarrow 18+4y=34 \Rightarrow 4y=34-18 \Rightarrow 4y=16 \Rightarrow y=4$.

Resolución de problemas usando sistemas de ecuaciones lineales

Del enunciado de algunos problemas se desprende que tenemos que hallar dos "cosas" desconocidas, es decir, en estos problemas podemos presentar dos incógnitas y plantear un sistema de ecuaciones para resolverlos. Veamos algunos ejemplos.

Ejemplo 5

Compramos dos kg de manzanas y un kg de tomates, y todo nos cuesta 7 €. Al día siguiente adquirimos uno de manzanas y tres de tomates, costándonos 11 €. ¿Cuál es el precio del kg de cada producto?

Podemos llamar x al precio de un kg de manzanas e y al precio de un kg de tomates. Según el enunciado podemos plantear el siguiente sistema de ecuaciones: $\begin{cases} 2x+y=7 \\ x+3y=11 \end{cases}$. Ahora lo resolvemos, por ejemplo, por el método de sustitución. De la primera ecuación se tiene que $y=7-2x$. Sustituyendo en la segunda: $x+3(7-2x)=11 \Rightarrow$ $\Rightarrow x+21-6x=11 \Rightarrow -5x=-10 \Rightarrow x=2$. Sustituyendo este valor en $y=7-2x$, tenemos: $y=7-4 \Rightarrow y=3$.

La conclusión es que el kilo de manzanas cuesta 2 €, y el kilo de tomates 3 €.

Ejemplo 6

Un padre tiene el doble de edad que su hijo. Hace 17 años, tenía el triple. Hallar la edad de ambos.

Llamemos x a la edad del padre e y a la edad del hijo. Como el padre tiene el doble de la edad que el hijo tenemos que $x=2y$. Por otro lado, hace 17 años el padre tenía $x-17$ años y el hijo tenía $y-17$ años. En aquel momento la edad del padre era el triple que la del hijo, es decir: $x-17=3(y-17)$. Si unimos ambas cosas tenemos el siguiente sistema de ecuaciones: $\begin{cases} x=2y \\ x-17=3(y-17) \end{cases}$.

Observemos que, en este caso, no es necesario pasar el sistema a su forma reducida para resolverlo. Esto es porque en la primera ecuación ya está despejada la incógnita x y esto nos viene muy bien para aplicar el método de sustitución. Sustituyendo pues el valor de x en la segunda ecuación tenemos: $2y-17=3(y-17) \Rightarrow 2y-17=3y-51 \Rightarrow$ $\Rightarrow 2y-3y=-51+17 \Rightarrow -y=-34 \Rightarrow y=34$. Sustituyendo en la primera ecuación $x=2\cdot 34 \Rightarrow x=68$. Por tanto, el padre tiene 68 años y el hijo 34.

Ejemplo 7

Un campo está plantado con un total de 250 árboles, entre olivos y almendros. Si el doble de almendros son 10 menos que el total de los olivos, ¿cuántos almendros habrá? ¿Y cuántos olivos?

Llamemos x al número de almendros e y al número de olivos. Está claro que $x+y=250$ porque hay un total de 250 árboles. Además, como el doble de almendros son 10 menos que el total de olivos, se tiene que $2x=y-10$. Entonces hemos de resolver el siguiente sistema $\begin{cases} x+y=250 \\ 2x=y-10 \end{cases}$. Si el sistema lo escribimos en su forma reducida $\begin{cases} x+y=250 \\ 2x-y=-10 \end{cases}$ y sumamos ambas ecuaciones (método de reducción) obtenemos: $3x=240 \Rightarrow x=80$. Sustituyendo en la primera ecuación: $80+y=250 \Rightarrow y=170$. Es decir, habrá 80 almendros y 170 olivos.

Ejemplo 8

Juan tiene el doble de dinero que María. Van al cine, pagando cada uno su entrada de 5 €, tras lo cual ambos tienen en total lo mismo que tenía Juan al principio. ¿Cuánto dinero tenía cada uno?

Llamemos x e y al dinero, en euros, que tenían respectivamente Juan y María. Como Juan tiene el doble de dinero que María tenemos que $x=2y$. Después de ir al cine a Juan le quedan $x-5$ euros y a María le quedan $y-5$ euros. La suma de estas dos cantidades es igual al dinero que tenía Juan al principio: $x-5+y-5=x$. El sistema que aparece es $\begin{cases} x=2y \\ x-5+y-5=x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-2y=0 \\ y=10 \end{cases}$. Si $y=10$, claramente $x=20$. Por tanto, Juan tenía 20 € y María tenía 10 €.

Ejemplo 9

Se desea mezclar vino de 55 céntimos/litro con otro de 40 céntimos/litro, de modo que la mezcla resulte a 45 céntimos/litro. ¿Cuántos litros de cada clase deberán mezclarse para obtener 300 litros de la mezcla deseada?

Llamemos x a la cantidad de litros de vino de 55 céntimos el litro y llamemos y a la cantidad de litros de vino de 40 céntimos el litro. Como queremos obtener 300 litros de mezcla, está claro que $x+y=300$. Los x litros de vino de 55 céntimos el litro, cuestan $55x$ céntimos. Y los y litros de vino de 40 céntimos el litro, costarán $40y$ céntimos. Como la mezcla resulta a 45 céntimos el litro y queremos obtener 300 litros de mezcla, su precio total será $45\cdot 300=13500$ céntimos. Por tanto, es fácil darse cuenta de que $55x+40y=13500$. El sistema resultante es $\begin{cases} x+y=300 \\ 55x+40y=13500 \end{cases}$.

Por reducción, multiplicando la primera ecuación por -40, el sistema se convierte en $\begin{cases} -40x-40y=12000 \\ 55x+40y=13500 \end{cases}$. Sumando ambas ecuaciones: $15x=1500 \Rightarrow x=100$. Sustituyendo en la primera ecuación: $100+y=300 \Rightarrow y=200$.

Ejemplo 10

En una clase el 70% son chicos. Además, se sabe que hay 12 chicas menos que chicos. ¿Cuántas chicas y chicos hay?

Llamemos x al número de chicos y llamemos y al número de chicas. Claramente, el total de la clase está formado por $x+y$ alumnos. El 70% de éstos son chicos, es decir: $\frac{70(x+y)}{100}=x$. Además, hay 12 chicas menos que chicos, o sea: $x-12=y$. Nos queda pues el siguiente sistema: $\begin{cases} \frac{70(x+y)}{100}=x \\ x-12=y \end{cases}$. Escribámoslo en forma reducida. Para ello eliminamos paréntesis y denominadores de la primera ecuación y luego, en ambas, escribimos las incógnitas a la izquierda y los términos sin incógnita a la derecha: $\begin{cases} 70x+70y=100x \\ x-12=y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -30x+70y=0 \\ x-y=12 \end{cases}$. Multiplicando por 30 la segunda ecuación: $\begin{cases} -30x+70y=0 \\ 30x-30y=360 \end{cases}$. Sumando ambas ecuaciones: $40y=360 \Rightarrow y=9$. Sustituyendo este valor en la segunda ecuación: $x-9=12 \Rightarrow x=21$. Por tanto, en la clase hay 21 chicos y 9 chicas.

Ejemplo 11

Un número está compuesto de dos cifras cuya suma es 9. Invirtiendo el orden de colocación de las cifras, resulta un número inferior en 27 unidades al dado. Calcular el número.

Supongamos que el número es ab donde a es la cifra de las decenas y b la cifra de las unidades. Realmente la cantidad es igual a $10a+b$. Como la suma de las cifras es igual a 9 tenemos que $a+b=9$. Por otro lado, si invertimos el orden de las cifras el número se convierte en ba, que es exactamente igual al número $10b+a$. Como esta cantidad es inferior en 27 unidades al número dado tenemos que $10b+a+27=10a+b$. Esto nos lleva a que hemos de resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} a+b=9 \\ 10b+a+27=10a+b \end{cases}$$

De la primera ecuación obtenemos $a=9-b$. Si sustituimos este valor en la segunda ecuación obtenemos:

$$10b+9-b+27=10(9-b)+b \Rightarrow 10b+9-b+27=90-10b+b \Rightarrow 9b+36=90-9b \Rightarrow 9b+9b=90-36 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 18b=54 \Rightarrow b=3.$$

De aquí se deduce que $a=9-b=9-3 \Rightarrow a=6$.

Por tanto, el número que se busca es el 63.