Propiedades de las potencias. Igualdades notables

Propiedades de las potencias	
Producto de potencias de la misma base es igual a la base elevada a la suma de los exponentes: $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	$\left(2x^3y^2\right)\left(-3x^2z^3\right)\left(-4yz^2\right) = 24x^3x^2y^2yz^3z^2 = $ $= 24x^5y^3z^5$
Cociente de potencias de la misma base es igual a la base elevada a la diferencia de los exponentes: $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$	$\frac{12a^3x^5}{28ax^3} = \frac{12}{28} \cdot \frac{a^3}{a} \cdot \frac{x^5}{x^3} = \frac{3}{7}a^2x^2$
Potencia de un producto es igual al producto de las potencias: $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$	$(-2xyzp)^3 = (-2)^3 x^3y^3z^3p^3 = -8x^3y^3z^3p^3$
Potencia de un cociente es igual al cociente de las potencias: $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$	$\left(\frac{-3ab}{2xy}\right)^3 = \frac{(-3ab)^3}{(2xy)^3} = \frac{-3^3a^3b^3}{2^3x^3y^3} = \frac{-27a^3b^3}{8x^3y^3}$
Potencia de una potencia es igual a la base elevada al producto de los exponentes: $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$	$\left(-\frac{2}{3}x^2z^4\right)^3 = -\left(\frac{2}{3}\right)^3 (x^2)^3 (z^4)^3 = -\frac{8}{27}x^6z^{12}$
Potencias de exponente negativo	
$a^{-1} = \frac{1}{a}$; $a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n$; $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^{-n}$	$\left(\frac{2}{3}\right)^{-3} \cdot 3^{-2} = \left(\frac{3}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{3^3}{2^3} \cdot \frac{1}{3^2} = \frac{3}{2^3} = \frac{3}{8}$
Signo de una potencia	
Cuando la base es positiva el resultado es positivo. Cuando la base es negativa: ✓ Si el exponente es **par** el resultado es positivo. ✓ Si el exponente es **impar** el resultado es negativo.	a) $(-2)^4 = 2^4 = 16$ b) $(-2)^3 = -2^3 = -8$ c) Obsérvese que $(-2)^2 = 4$ y que $-2^2 = -4$
Igualdades notables	
Cuadrado de una suma es igual al cuadrado del primero más dos veces el primero por el segundo, más el cuadrado del segundo: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ **¡OJO!** *No confundir la igualdad anterior con esta otra, que es errónea:* $(a+b)^2 = a^2 + b^2$	d) $(2x+3)^2 = (2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot 3 + 3^2 = 4x^2 + 12x + 9$ e) $\left(\frac{5}{x} + 2x\right)^2 = \left(\frac{5}{x}\right)^2 + 2 \cdot \frac{5}{x} \cdot 2x + (2x)^2 =$ $= \frac{25}{x} + 20 + 4x^2$
Cuadrado de una diferencia es igual al cuadrado del primero menos dos veces el primero por el segundo, más el cuadrado del segundo: $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ **¡OJO!** *No confundir la igualdad anterior con esta otra, que es errónea:* $(a-b)^2 = a^2 - b^2$	a) $(5b-3)^2 = (5b)^2 - 2 \cdot 5b \cdot 3 + 3^2 = 25b^2 - 30b + 9$ b) $\left(6x - \frac{x^2}{2}\right)^2 = (6x)^2 - 2 \cdot 6x \cdot \frac{x^2}{2} + \left(\frac{x^2}{2}\right)^2 =$ $= 36x^2 - 6x^3 + \frac{x^4}{4}$
Suma por diferencia es igual a diferencia de cuadrados: $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$	$(4x+2y)(4x-2y) = (4x)^2 - (2y)^2 = 16x^2 - 4y^2$

Radicales

Definición y forma exponencial

Definición: $\sqrt[n]{a}=b \iff a=b^n$ $\sqrt[n]{a}$ es el **radical**, a el **radicando** y n el **índice** de la raíz. Si $a\geq 0$, $\sqrt[n]{a}$ existe cualquiera que sea n. Si $a<0$, $\sqrt[n]{a}$ solo existe para valores impares de n.	a) $\sqrt{81}=9 \iff 81=9^2$ b) $\sqrt[3]{-27}=-3 \iff -27=(-3)^3$ c) $\sqrt[4]{\dfrac{81}{16}}=\dfrac{3}{4} \iff \dfrac{81}{16}=\left(\dfrac{3}{4}\right)^4$
Forma exponencial: $\sqrt[n]{a}=a^{\frac{1}{n}}$; $\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}$	$\sqrt[3]{2}=2^{\frac{1}{3}}$, ya que $\left(2^{1/3}\right)^3=2^{\frac{3}{3}}=2^1=2$

Propiedades de los radicales

Radicales equivalentes: $\sqrt[n]{a^m}=\sqrt[n\cdot p]{a^{m\cdot p}}$	Esta propiedad se usa para ***simplificar radicales***, dividiendo índice y exponente entre un divisor común: $\sqrt[8]{81}=\sqrt[8]{3^4}=\sqrt[2\cdot 4]{3^4}=\sqrt{3}$ También se usa para ***reducir radicales a índice común***: Por ejemplo: reducir a índice común $\sqrt{2}$ y $\sqrt[3]{2}$: $\sqrt{2}=\sqrt[2\cdot 3]{2^3}=\sqrt[6]{8}$; $\sqrt[3]{2}=\sqrt[3\cdot 2]{2^2}=\sqrt[6]{4}$
Potencia de un radical: $\left(\sqrt[n]{a}\right)^p=\sqrt[n]{a^p}$ En particular: $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n=\sqrt[n]{a^n}=a$	$\left(\sqrt[6]{2}\right)^4=\sqrt[6]{2^4}=\sqrt[3]{2}$
Raíz de una raíz: $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}$	$\sqrt[3]{\sqrt{\sqrt[4]{9}}}=\sqrt[24]{9}=\sqrt[24]{3^2}=\sqrt[12]{3}$
Raíz de un producto: $\sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a\,b}$	$\sqrt[3]{6}\cdot\sqrt[3]{9}=\sqrt[3]{54}=\sqrt[3]{3^3\cdot 2}=\sqrt[3]{3^3}\cdot\sqrt[3]{2}=3\sqrt[3]{2}$ (en este ejemplo la propiedad se ha utilizado dos veces)
Raíz de un cociente: $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$	$\dfrac{\sqrt[3]{12}\cdot\sqrt{9}}{\sqrt[6]{6}}=\dfrac{\sqrt[6]{(12)^2}\cdot\sqrt[6]{9^3}}{\sqrt[6]{6}}=\sqrt[6]{\dfrac{(2^2 3)^2\cdot(3^2)^3}{2\cdot 3}}=$ $=\sqrt[6]{\dfrac{2^2\cdot 3^2\cdot 3^6}{2\cdot 3}}=\sqrt[6]{2\cdot 3^7}=\sqrt[6]{4374}$ (observa cómo se han utilizado en este ejemplo varias de las propiedades anteriores para simplificar)

Extracción de factores de un radical

Supongamos que tenemos un radical de la forma $\sqrt[n]{a^m}$, donde $m>n$. Si efectuamos la división m entre n, obtenemos un cociente c y un resto r. Entonces tenemos: $\sqrt[n]{a^m}=a^c\sqrt[n]{a^r}$	$\sqrt[5]{2^{39}}=2^7\,\sqrt[5]{2^4}=256\,\sqrt[5]{16}$ Observa que al dividir 39 entre 5 el cociente es 7 y el resto es 4

Suma de radicales

Dos radicales se dicen ***semejantes*** si la raíz que aparece en ambos tiene el mismo índice y el mismo radicando (por ejemplo $5\sqrt{2}$ y $-3\sqrt{2}$ son radicales semejantes). Solamente se pueden sumar (o restar) radicales que sean semejantes.	$\sqrt{12}+\sqrt{27}-\sqrt{75}=\sqrt{2^2\cdot 3}+\sqrt{3^3}-\sqrt{5^2\cdot 3}=$ $=2\sqrt{3}+3\sqrt{3}-5\sqrt{3}=(2+3-5)\sqrt{3}=0\sqrt{3}=0$