Ángulos central e inscrito en una circunferencia

Dados dos puntos A y C en una circunferencia, los radios desde el centro O de la circunferencia a esos dos puntos forman un *ángulo central* $\widehat{AOC}$.

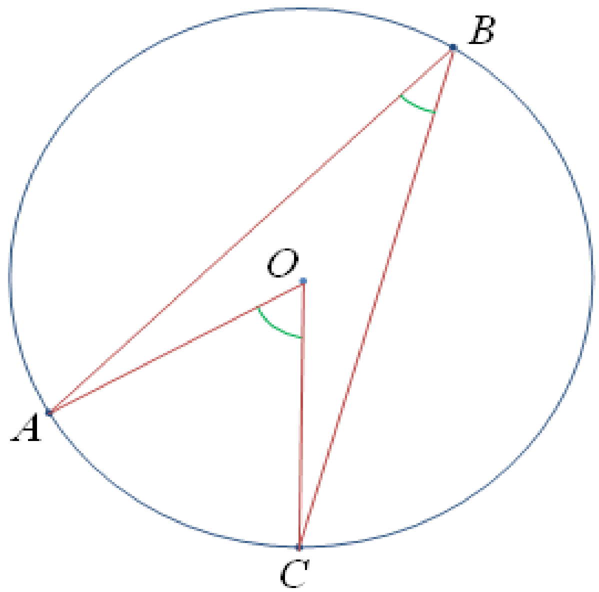

Figura 1: Ángulos central e inscrito en una circunferencia

Un *ángulo inscrito* es un ángulo subtendido en un punto B de la circunferencia por otros dos puntos de la circunferencia A y C. El ángulo inscrito $\widehat{ABC}$ está definido por dos cuerdas de una circunferencia que tienen un extremo común, en el caso de la figura 1, $\overline{AB}$ y $\overline{CB}$.

Según Los Elementos de Euclides (Libro III, proposición 20), "en una circunferencia, el ángulo cuyo vértice está en el centro es el doble del ángulo cuyo vértice está en la circunferencia cuando los rayos que forman los ángulos cortan a la circunferencia en los mismos dos puntos". Esta proposición también se llama *teorema del ángulo central*: "el ángulo central subtendido por dos puntos de una circunferencia es el doble que cualquier ángulo inscrito subtendido por esos dos puntos". Simbólicamente, en la figura 1, $\widehat{AOC} = 2 \cdot \widehat{ABC}$.

Para demostrar este resultado vamos a demostrar antes otros dos casos más sencillos.

En el primero de ellos se afirma que "si un ángulo inscrito subtiende un diámetro entonces es un ángulo recto". Este es un caso particular del teorema del ángulo central pues en este caso el ángulo central es un ángulo llano, de 180°. Es decir, hemos de demostrar que $\widehat{ABC} = 90^\circ$ (ver figura 2).

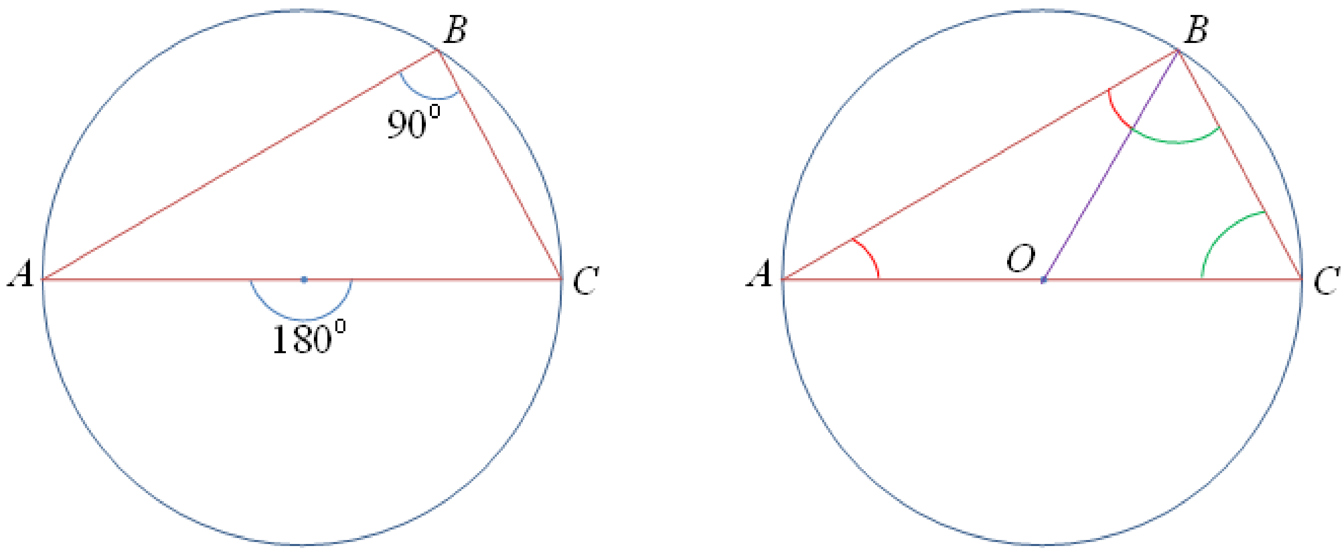

Figura 2: Ángulo inscrito que subtiende un diámetro

Nótese en primer lugar que, como $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ y $\overline{OC}$ tienen la misma longitud al ser radios de la circunferencia, los triángulos AOB y BOC son isósceles. Es conocido que los ángulos de la base de un triángulo isósceles son iguales, en este caso, $\widehat{OAB} = \widehat{OBA}$ y $\widehat{OBC} = \widehat{OCB}$. Sumando los ángulos del triángulo ABC podemos escribir:

$$180^\circ = \widehat{CAB} + \widehat{ABC} + \widehat{BCA} = \widehat{OAB} + (\widehat{OBA} + \widehat{OBC}) + \widehat{OCB} =$$

$$= (\widehat{OAB} + \widehat{OBA}) + (\widehat{OBC} + \widehat{OCB}) = 2 \cdot \widehat{OBA} + 2 \cdot \widehat{OBC}$$

Eliminando los pasos intermedios:

$$180^\circ = 2 \cdot \widehat{OBA} + 2 \cdot \widehat{OBC}$$

Entonces, dividiendo todos los términos entre 2, queda demostrado lo que pretendíamos:

$$90^\circ = \widehat{OBA} + \widehat{OBC} = \widehat{ABC}$$

En el segundo de los casos consideraremos también el caso particular del teorema del ángulo central en el que una de las cuerdas que forman el ángulo inscrito es un diámetro. En este caso tendremos que demostrar que $2 \cdot \widehat{ABC} = \widehat{AOC}$ (ver figura 3).

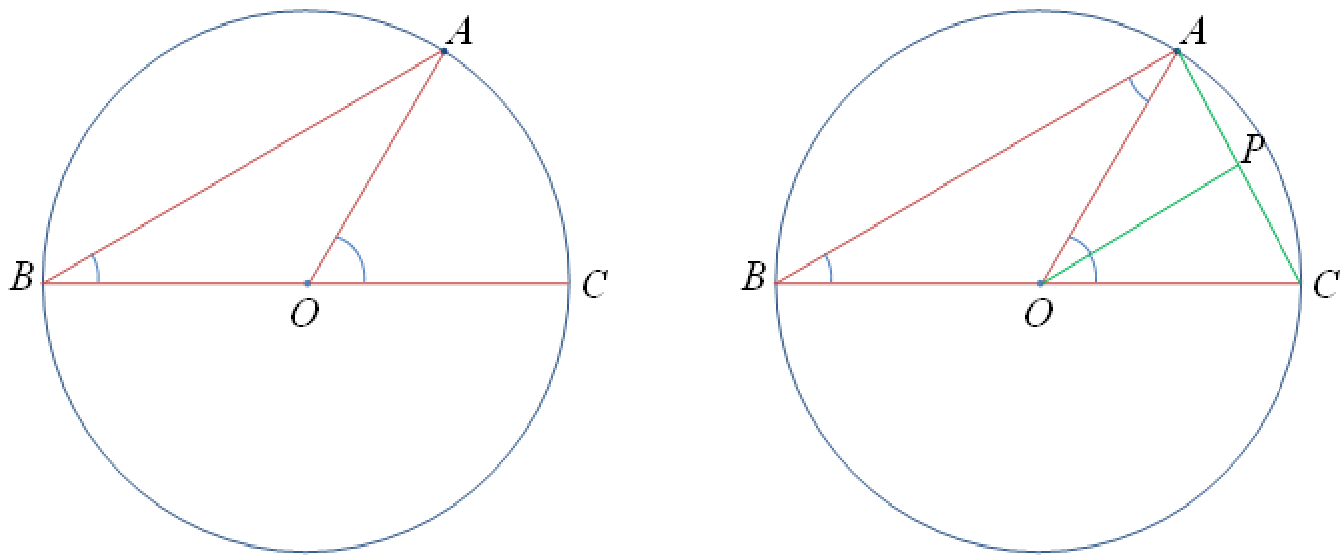

Figura 3: Una de las cuerdas que forman el ángulo inscrito es un diámetro

Dibujamos la línea $\overline{OP}$ paralela a $\overline{OB}$, con lo que claramente $\widehat{ABC} = \widehat{POC}$ (obsérvese la parte de la derecha de la figura 3). Pero es que también se cumple que $\widehat{ABC} = \widehat{BAO} = \widehat{AOP}$. Por tanto

$$\widehat{AOC} = \widehat{AOP} + \widehat{POC} = \widehat{ABC} + \widehat{ABC} = 2 \cdot \widehat{ABC}$$

tal y como queríamos demostrar.

Volvamos a la figura 1. Utilizaremos este último caso para demostrar el teorema del ángulo central. Recordemos que teníamos que demostrar que $\widehat{AOC} = 2 \cdot \widehat{ABC}$.

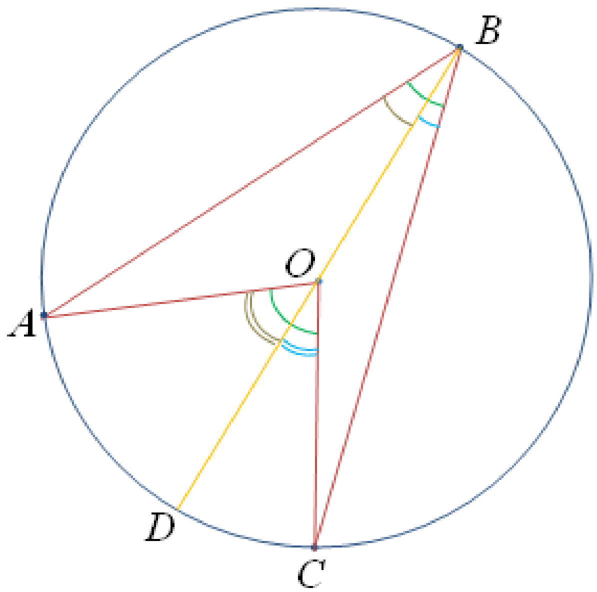

Figura 4: El ángulo central es el doble del ángulo inscrito

Para ello vamos a trazar un diámetro $\overline{BD}$ que pase por el vértice del ángulo inscrito (véase la figura 4). Por el caso anterior tenemos:

$$\widehat{AOD} = 2 \cdot \widehat{ABD} \quad ; \quad \widehat{COD} = 2 \cdot \widehat{CBD}$$

Sumando miembro a miembro ambas igualdades:

$$\widehat{AOD} + \widehat{COD} = 2 \cdot (\widehat{ABD} + \widehat{CBD})$$

Por tanto:

$$\widehat{AOC} = 2 \cdot \widehat{ABC}$$

Estos resultados se utilizan con frecuencia para demostrar otros de bastante importancia en matemáticas.

Por ejemplo, haciendo uso del resultado que dice que *si un ángulo inscrito subtiende un diámetro entonces es un ángulo recto*, se demuestra, en el teorema de los senos que

$$\frac{a}{\text{sen}A} = \frac{b}{\text{sen}B} = \frac{a}{\text{sen}C} = 2r$$

donde r es el radio de la circunferencia circunscrita al triángulo de lados a, b y c, y de vértices (y ángulos), opuestos a cada lado, A, B y C. Puedes ver la demostración aquí:
http://lasmatematicas.eu/geometria/geometria/el-teorema-de-los-senos.