# Examen de Matemáticas II – 2º de Bachillerato

**1.** Calcula el siguiente límite: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\text{tg}^2 x}{1-\cos x}$ **(1 punto)**

**2.** Determina dos números reales positivos sabiendo que su suma es 10 y que el producto de sus cuadrados es máximo. **(1 punto)**

**3.** Sea la función $f(x)=2x^3+12x^2+ax+b$. Determina $a$ y $b$ sabiendo que la recta tangente a la gráfica de $f$ en su punto de inflexión es la recta $y=2x+3$. **(1 punto)**

**4.** Dada la función: $f(x)=\dfrac{x^3}{(x+1)^2}$

**a)** Halla su dominio y los puntos de corte con los ejes. **(0,5 puntos)**

**b)** Halla sus asíntotas verticales y horizontales **(0,5 puntos)**

**c)** Estudia su monotonía y halla sus extremos relativos. **(1 punto)**

**d)** Realiza una representación gráfica aproximada de la función. **(1 punto)**

**5.** Halla las siguientes integrales indefinidas:

**a)** $\int \ln\left(1+x^2\right)dx$ **(1 punto)**

**b)** $\int \dfrac{x^2+1}{x^3-4x^2+5x-2}dx$ **(1,5 puntos)**

**6.** Dadas las funciones $f(x)=4x-x^2$ y $g(x)=x^2-6x+8$:

**a)** Dibujar el recinto plano limitado por las gráficas de ambas funciones. **(0,5 puntos)**

**b)** Hallar el área de dicho recinto. **(1 punto)**

① $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-tg^2 x}{1-\cos x} = \left[\text{INDET } \dfrac{0}{0}\right] \underset{\text{L'Hôpital}}{=} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-2tg x\,(1+tg^2 x)}{\operatorname{sen} x} =$

$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-2\,\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}(1+tg^2 x)}{\operatorname{sen} x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-2\operatorname{sen} x\,(1+tg^2 x)}{\operatorname{sen} x\cdot\cos x} =$

$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-2(1+tg^2 x)}{\cos x} = \dfrac{-2(1+0)}{1} = \underline{\underline{-2}}$

② Números: $x, y$. $x+y=10 \Rightarrow y = 10-x$

Hemos de maximizar $x^2\cdot y^2 = x^2(10-x)^2 = x^2(100-20x+x^2) =$
$= x^4 - 20x^3 + 100x^2$. Llamemos pues $f(x) = x^4-20x^3+100x^2$

$f'(x) = 0 \iff 4x^3-60x^2+200x = 0 \iff x(4x^2-60x+200) = 0$
$\iff x=0,\ x=5,\ x=10$

$f''(x) = 12x^2-120x+200$
$f''(0) = 200 > 0 \Rightarrow x=0$ es MÍNIMO
$f''(5) = -100 < 0 \Rightarrow x=5$ es MÁXIMO $\rightarrow$
$f''(10) = 200 > 0 \Rightarrow x=10$ es MÍNIMO

Por tanto los números pedidos son:
$\underline{\underline{x=5}}$
$y = 10-5;\ \underline{\underline{y=5}}$

③ $f'(x) = 6x^2+24x+a$ ; $f''(x) = 12x+24$ ; $f'''(x) = 12$

$f''(x) = 0 \iff 12x+24 = 0 \iff \underline{x=-2}$ es un punto de inflexio

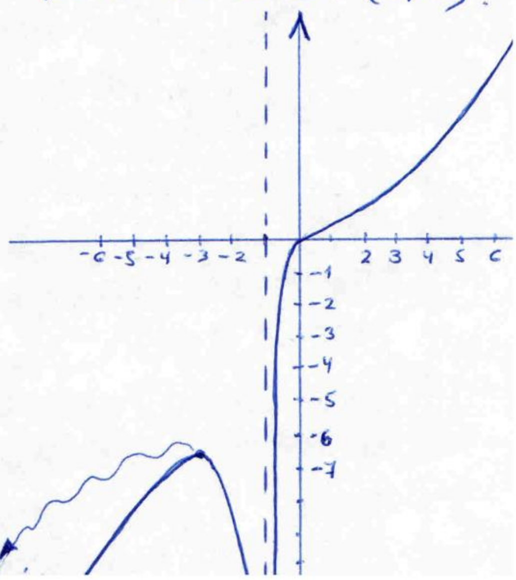
La recta tangente en $x=-2$ es $y = 2x+3$. Entonces:
$f'(-2) = 2 \Rightarrow 24-48+a = 2 \Rightarrow \underline{\underline{a=26}}$

Además si $x=-2 \Rightarrow y=-1$ (punto de tangencia) $\Rightarrow$
$f(-2) = -16+48-52+b = -1 \Rightarrow \underline{\underline{b=19}}$

④ a) $\operatorname{Dom} f = \mathbb{R}-\{-1\}$. Solamente hay un punto de corte: $(0,0)$.

b) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^3}{(x+1)^2} = -\infty \Rightarrow$
$\Rightarrow \underline{\underline{x=-1 \text{ es asíntota vertical}}}$

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^3}{(x+1)^2} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x^3}{(x+1)^2} = -\infty \end{array}\right\} \Rightarrow f$ no tiene asíntotas horizontales




c) $f'(x) = \dfrac{x^2(x+3)}{(x+1)^3}$ ; $f'(x) = 0 \iff$
$\iff x=0$ ; $x=-3$ (posibles extremos)

$f'>0$ | $-3$ | $f'<0$ | $-1$ | $f'>0$ | $0$ | $f'>0$

$\nearrow$ $\searrow$ $\nearrow$ $\nearrow$

* Creciente en $(-\infty,-3)\cup(-1,0)\cup(0,+\infty)$
* Decreciente en $(-3,-1)$ ...

5) a) $\int \ln(1+x^2)\,dx = \begin{bmatrix} u=\ln(1+x^2), & dv=dx \\ du=\frac{2x}{1+x^2}\,dx, & v=x \end{bmatrix} = x\ln(1+x^2) - \int \frac{2x^2}{1+x^2}\,dx$

$= x\ln(1+x^2) - \int\left(2-\frac{2}{x^2+1}\right)dx = x\ln(1+x^2) - 2x + 2\operatorname{arctg} x + C$

b) $x^3-4x^2+5x-2 = (x-2)(x-1)^2$. Entonces:

$\frac{x^2+1}{x^3-4x^2+5x-2} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2} = \frac{A(x-1)^2 + B(x-2)(x-1) + C(x-2)}{(x-2)(x-1)^2}$

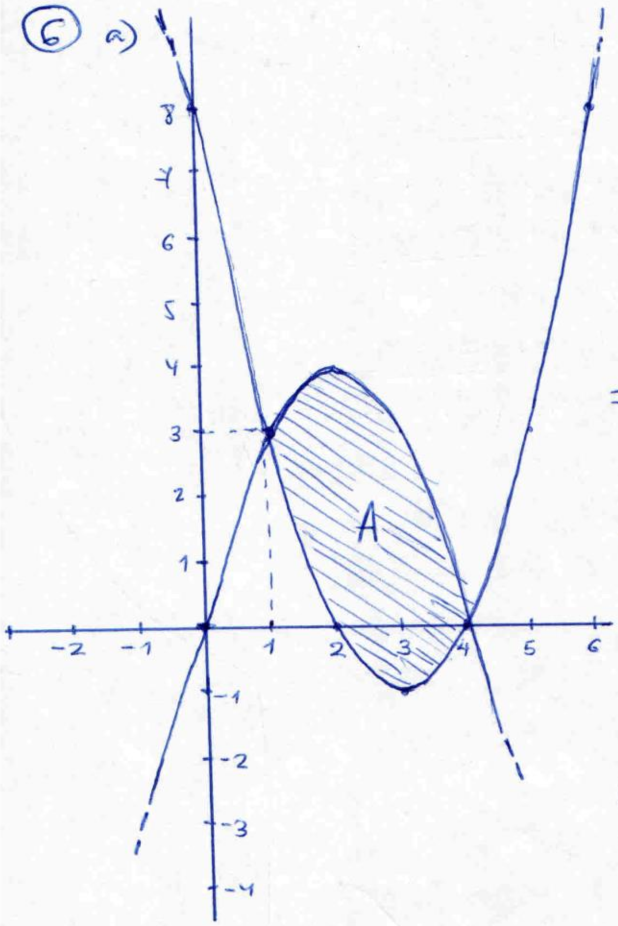
$= \frac{A(x^2-2x+1) + B(x^2-3x+2) + C(x-2)}{(x-2)(x-1)^2} = \frac{(A+B)x^2 + (-2A-3B+C)x + (A+2B-2C)}{(x-2)(x-1)^2}$

$\Rightarrow \begin{cases} A+B=1 \\ -2A-3B+C=0 \\ A+2B-2C=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=5 \\ B=-4 \\ C=-2 \end{cases}$. Por tanto:

$\int \frac{x^2+1}{x^3-4x^2+5x-2}\,dx = 5\int\frac{1}{x-2}\,dx - 4\int\frac{1}{x-1}\,dx - 2\int\frac{1}{(x-1)^2}\,dx =$

$= 5\ln|x-2| - 4\ln|x-1| + \frac{2}{x-1} + C$

6) a)




b) Resolviendo la ecuación $4x-x^2 = x^2-6x+8$ tenemos los puntos de corte de ambas gráficas ($x=1$, $x=4$)

$A = \int_1^4 \left[(4x-x^2) - (x^2-6x+8)\right]dx =$

$= \int_1^4 (-2x^2+10x-8)\,dx =$

$= \left.\frac{-2}{3}x^3 + 5x^2 - 8x\right]_1^4 =$

$= \left(\frac{-2}{3}\cdot 64 + 80 - 32\right) - \left(\frac{-2}{3} + 5 - 8\right) =$

$= \frac{16}{3} - \left(-\frac{11}{3}\right) = \frac{27}{3} = 9\ u^2$