UCLM – EvAU – Matemáticas II

Sistemas de ecuaciones lineales

1. Examen 1 (junio 2012 – Propuesta A)

3A. a) Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $m \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ x+2y+3z=0 \\ mx+(m+1)y+(m-1)z=m-2 \\ 3x+(m+3)y+4z=m-2 \end{cases}$$

b) Calcula la solución cuando el sistema sea compatible determinado.

Solución.

a) La matriz de los coeficientes es $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ m & m+1 & m-1 \\ 3 & m+3 & 4 \end{pmatrix}$. Puesto que contiene un menor de orden dos distinto de cero: $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=1\neq 0$, el rango de A es al menos dos. Los dos determinantes de orden tres que contienen a este menor de orden dos son: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ m & m+1 & m-1 \end{vmatrix}$ y $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & m+4 & 4 \end{vmatrix}$.

Pero $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ m & m+1 & m-1 \end{vmatrix}=\begin{bmatrix} c_2-c_1 \\ c_3-c_2 \end{bmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ m & 1 & -2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}=-2-1=-3$, con lo que este determinante es distinto de cero, independientemente del valor del parámetro m. Esto quiere decir que el rango de A es tres sea quien sea m: $r(A)=3,\ \forall m\in\mathbb{R}$.

La matriz ampliada del sistema es $A'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ m & m+1 & m-1 & m-2 \\ 3 & m+3 & 4 & m-2 \end{pmatrix}$, cuyo rango es al menos tres pues ya hemos visto anterior que hay al menos un menor de orden tres distinto de cero. Estudiemos pues el único menor de orden cuatro (menor principal):

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ m & m+1 & m-1 & m-2 \\ 3 & m+3 & 4 & m-2 \end{vmatrix}=\begin{bmatrix} c_2-c_1 \\ c_3-c_1 \end{bmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ m & 1 & -1 & m-2 \\ 3 & m & 1 & m-2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & m-2 \\ m & 1 & m-2 \end{vmatrix}=(m-2)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ m & 1 & 1 \end{vmatrix}=$$

$=(m-2)(-1+2m-2-1)=(m-2)(2m-4)=2(m-2)^2=0\Leftrightarrow m=2$. Entonces: $\begin{cases} r(A')=3\Leftrightarrow m=2 \\ r(A')=4\Leftrightarrow m\neq 2 \end{cases}$.

Por el teorema de Rouché obtenemos la siguiente conclusión:

- Si $m=2$, $r(A)=r(A')=3=n$, con lo que el sistema es compatible determinado (solución única).
- Si $m\neq 2$, $r(A)=3\neq 4=r(A')$, con lo que el sistema es incompatible (no tiene solución).

b) En el apartado anterior se ha visto que el sistema es compatible determinado (solución única) cuando $m=2$. Pero es que, en este caso el sistema adopta la siguiente forma:

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ x+2y+3z=0 \\ 2x+3y+2z=0 \\ 3z+5y+4z=0 \end{cases}$$

Este es un sistema homogéneo (los términos independientes son todos iguales a cero). Por tanto, la única solución del sistema es, obviamente, $x=y=z=0$.

2. Examen 4 (septiembre 2012 – Propuesta B)

3B. a) Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $a\in\mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x+y+2z=0 \\ ax-3z=a \\ 2x+ay-z=a \end{cases}$$

b) Resuélvelo para el valor $a=1$.

Solución.

a) La matriz de los coeficientes es $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ a & 0 & -3 \\ 2 & a & -1 \end{pmatrix}$, la cual contiene un menor de orden dos distinto de cero:

$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \end{vmatrix}=-3\neq 0$, con lo que el rango de A es por lo menos dos. Calculemos el valor del menor principal:

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ a & 0 & -3 \\ 2 & a & -1 \end{vmatrix}=\left(-6+2a^2\right)-\left(-a-3a\right)=2a^2+4a-6=0\Leftrightarrow\begin{cases} a=-3 \\ a=1 \end{cases}$. Entonces podemos concluir lo siguiente:

- Si $a\neq -3$ y $a\neq 1$, $r(A)=3$.
- Si $a=-3$ o $a=1$, $r(A)=2$.

La matriz ampliada es $A'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ a & 0 & -3 & a \\ 2 & a & -1 & a \end{pmatrix}$.

- Está claro que si $a\neq -3$ y $a\neq 1$, entonces $r(A')=3$. Por el teorema de Rouché, en estos casos se tiene que $r(A)=r(A')=3=n$, con lo que el sistema será compatible determinado (solución única).
- Si $a=-3$, la matriz ampliada es $A'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & -3 & -3 \\ 2 & -3 & -1 & -3 \end{pmatrix}$. Ya sabemos que uno de los menores de orden tres que contiene al menor $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \end{vmatrix}$ es igual a cero. Veamos lo que ocurre con el otro:

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & -3 \\ -3 & -1 & -3 \end{vmatrix} = (-3)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ -3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (-3)(-3-6+1) = (-3)(-8) = 24 \neq 0$. Esto indica que si $a=-3$, el rango de la matriz ampliada es tres. Por tanto, si $a=-3$, $r(A) = 2 \neq 3 = r(A')$, con lo que el sistema será incompatible (no tiene solución).

- Si $a=1$, la matriz ampliada es $A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, cuyo rango es dos, ya que la tercera fila es la suma de las dos primeras. Entonces si $a=1$, $r(A) = r(A') = 2 < 3 = n$, con lo que el sistema será compatible indeterminado (infinitas soluciones).

b) Si $a=1$ ya hemos visto que hay infinitas soluciones. Puesto que la tercera fila es combinación lineal de la primera y la segunda, la podemos eliminar y entonces el sistema quedaría de la siguiente manera:

$$\begin{cases} x+y+2z=0 \\ x-3z=1 \end{cases}$$

Puesto que el grado de libertad es $g=3-2=1$, una incógnita "va por libre". Además, como el menor de orden dos que hemos comprobado que es distinto de cero es el formado por la segunda y tercera columna, nos aseguramos de que hay solución si son éstas las que dejamos para despejar incógnitas y llamamos $x=\lambda$. O sea:

$$\begin{cases} y+2z=-\lambda \\ -3z=1-\lambda \end{cases} \quad \textbf{(1)}$$

Del sistema anterior se deduce rápidamente que $z=\dfrac{-1+\lambda}{3}$ y que

$$y+\frac{2(\lambda-1)}{3}=-\lambda \Rightarrow y=\frac{-2\lambda+2}{3}-\lambda=\frac{-2\lambda+2-3\lambda}{3} \Rightarrow y=\frac{2-5\lambda}{3}.$$

Por tanto, las soluciones del sistema si $a=1$ son: $(x,y,z)=\left(\lambda,\dfrac{2-5\lambda}{3},\dfrac{-1+\lambda}{3}\right)$.

Observaciones

Conviene, tal y como se ha hecho, despejar las incógnitas que contienen al menor de orden dos que se eligió al principio para comprobar que el rango de la matriz de los coeficientes era al menos dos. Y dejar libre la que no va con este menor. En este caso ha sido la incógnita x. Esto garantiza soluciones para las incógnitas y, z pues la matriz de los coeficientes del sistema **(1)** tiene rango dos (su determinante es distinto de cero).

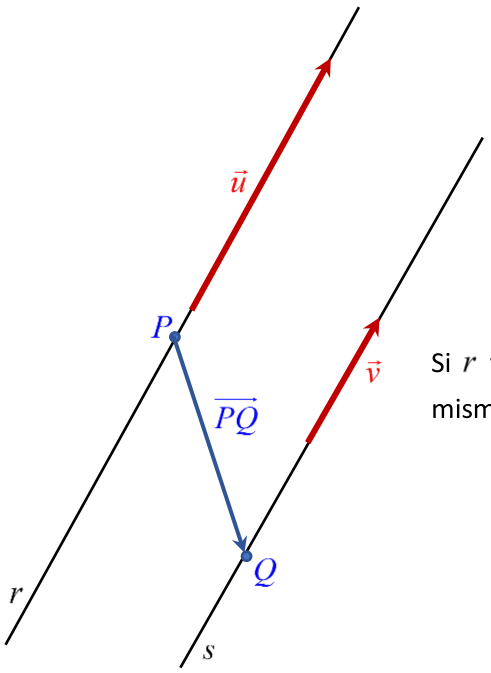
Pero no es estrictamente obligatorio hacerlo así. En este caso podríamos tomar también $z=\lambda$, con lo que el sistema se convertiría en este otro: $\begin{cases} x+y=-2\lambda \\ x=1+3\lambda \end{cases}$. Sustituyendo el valor de x en la primera ecuación: $1+3\lambda+y=-2\lambda \Rightarrow y=-1-5\lambda$. Por tanto, las soluciones del sistema si $a=1$ las podemos escribir ahora así: $(x,y,z)=(1+3\lambda,-1-5\lambda,\lambda)$. Si comparamos estas soluciones con las obtenidas anteriormente se puede pensar que no son las mismas, pero sí, sí que lo son. Y se puede demostrar.

Por un lado, $(x,y,z)=\left(\lambda,\dfrac{2-5\lambda}{3},\dfrac{-1+\lambda}{3}\right)=\left(\lambda,\dfrac{2}{3}-\dfrac{5}{3}\lambda,-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}\lambda\right) \Rightarrow (x,y,z)=\left(0,\dfrac{2}{3},-\dfrac{1}{3}\right)+\lambda\left(1,-\dfrac{5}{3},\dfrac{1}{3}\right)$. Esta es la ecuación vectorial de una recta r que pasa por el punto $P\left(0,\dfrac{2}{3},-\dfrac{1}{3}\right)$ y tiene vector director $\vec{u}=\left(1,-\dfrac{5}{3},\dfrac{1}{3}\right)$: $r=\overrightarrow{OP}+\lambda\vec{u}$, donde $O=(0,0,0)$ (el origen de coordenadas). ***Todos los puntos de esta recta son las infinitas soluciones del sistema***.

Todo esto es parecido a lo que se hizo Matemáticas I (1º de Bachillerato) en la parte de geometría plana (que se debería de repasar). Lo que ocurre es que ahora los puntos y vectores tienen tres coordenadas, es decir, estamos trabajando en el espacio tridimensional. Si hubiera cuatro incógnitas, los puntos y vectores tendrían cuatro coordenadas y trabajaríamos en un espacio de dimensión cuatro, y así sucesivamente.

Por otro lado, $(x,y,z)=(1+3\lambda,-1-5\lambda,\lambda)=(1,-1,0)+\lambda(3,-5,1)$. Ahora esta es la ecuación vectorial de una recta s que pasa por el punto $Q(1,-1,0)$ y tiene vector director $\vec{v}=(3,-5,1)$: $s\equiv\overrightarrow{OQ}+\lambda\vec{v}$.

Observa que los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son proporcionales, ya que $\vec{v}=3\vec{u}$. Esto quiere decir que ambas rectas son o bien paralelas o bien coincidentes. Pero es que el vector que une el punto P y el punto Q tiene la misma dirección que $\vec{u}$ y que $\vec{v}$. De hecho, $\overrightarrow{PQ}=Q-P=(1,-1,0)-\left(0,\frac{2}{3},-\frac{1}{3}\right)=\left(1,-\frac{5}{3},\frac{1}{3}\right)=\vec{v}$. Esto indica que ambas rectas son coincidentes (o sea, las soluciones del sistema son las mismas). Si las dos rectas fuesen paralelas el vector $\overrightarrow{PQ}$ no podría tener la misma dirección que $\vec{u}$ y $\vec{v}$ (ver la siguiente figura).



Si r y s fuesen paralelas $\overrightarrow{PQ}$ no tendría la misma dirección que $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

Por cierto, si el sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones) y el grado de libertad es uno, la solución es una recta (una incógnita libre), si el grado de libertad es dos, la solución es un plano (dos incógnitas libres), si el grado de libertad es tres, la solución es un espacio tridimensional (tres incógnitas libres) y así sucesivamente…

3. Examen 6 (reserva 1 2012 – Propuesta B)

3B. a) Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $m\in\mathbb{R}$:

$$\begin{cases} mx+z=1 \\ my+z=m \\ -mx-my+(m+1)z=-m-1 \end{cases}$$

b) Calcula la solución cuando el sistema sea compatible indeterminado.

Solución.

a) La matriz de los coeficientes es $A=\begin{pmatrix} m & 0 & 1 \\ 0 & m & 1 \\ -m & -m & m+1 \end{pmatrix}$.

En este caso no podemos encontrar un menor de orden dos que no dependa del parámetro m. Pero como sólo existe un menor de orden tres (el menor principal), será sencillo deducir el rango de A según los valores del parámetro m.

$$\begin{vmatrix} m & 0 & 1 \\ 0 & m & 1 \\ -m & -m & m+1 \end{vmatrix} = [f_3 + f_1] = \begin{vmatrix} m & 0 & 1 \\ 0 & m & 1 \\ 0 & -m & m+2 \end{vmatrix} = m \begin{vmatrix} m & 1 \\ -m & m+2 \end{vmatrix} = -m\left(m^2 + 2m + m\right) = -m\left(m^2 + 3m\right) =$$

$= -m^2(m+3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = -3 \end{cases}$. Entonces:

- Si $m \neq 0$ y $m \neq -3$, $r(A) = 3$.
- Si $m = 0$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y entonces $r(A) = 1$ pues las tres filas son iguales (no hay ningún menor de orden dos distinto de cero).
- Si $m = -3$, $A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 3 & 3 & -2 \end{pmatrix}$, con lo que $r(A) = 2$ pues hay al menos un menor de orden dos distinto de cero, por ejemplo, $\begin{vmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} = 9 \neq 0$.

La matriz ampliada es $A' = \begin{pmatrix} m & 0 & 1 & 1 \\ 0 & m & 1 & m \\ -m & -m & m+1 & -m-1 \end{pmatrix}$. Estudiemos ahora también su rango para los distintos valores de m:

- Está claro que si $m \neq 0$ y $m \neq -3$, $r(A) = r(A') = 3 = n$ y el sistema es compatible determinado (solución única).
- Si $m = 0$, $A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, con lo que $r(A') = 2$ pues hay al menos un menor de orden dos distinto de cero: $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$. Entonces, en este caso, $r(A) = 1 \neq 2 = r(A')$ y el sistema es incompatible (no tiene solución).
- Si $m = -3$, $A' = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & -3 \\ 3 & 3 & -2 & 2 \end{pmatrix}$. Ya sabíamos que uno de los menores de orden tres que contiene a $\begin{vmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} = 9 \neq 0$ (el formado por las tres primeras columnas) es igual a cero. Veamos qué ocurre con el otro: $\begin{vmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & -3 \\ 3 & 3 & 2 \end{vmatrix} = [f_3 + f_1] = \begin{vmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 0$ (las dos últimas filas son proporcionales). Por tanto, en este caso, $r(A') = 2 = r(A) < 3 = n$, y el sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones). También podríamos haber deducido que $r(A')$ es igual a dos porque $f_3 = -f_1 - f_2$.

b) Ya hemos visto en el apartado anterior que el sistema es compatible indeterminado cuando $m=-3$. El sistema es, en este caso, el siguiente:

$$\begin{cases} -3x+z=1 \\ -3y+z=-3 \\ 3x+3y-2z=2 \end{cases}$$

Puesto que el rango de la matriz ampliada es dos podemos eliminar la última ecuación (nos quedamos con las ecuaciones que contienen al menor de orden dos distinto de cero). Además, recuerda que $f_3=-f_1-f_2$.

Obtenemos así el siguiente sistema equivalente al anterior: $\begin{cases} -3x+z=1 \\ -3y+z=-3 \end{cases}$

Puesto que el grado de libertad es $g=3-2=1$, llamando $z=\lambda$, el sistema queda así: $\begin{cases} -3x=1-\lambda \\ -3y=-3-\lambda \end{cases}$. Ahora es fácil deducir ya que $x=\dfrac{-1+\lambda}{3}$, $y=\dfrac{3+\lambda}{3}$. Entonces las infinitas soluciones del sistema quedaría del siguiente modo: $(x,y,z)=\left(\dfrac{-1+\lambda}{3},\dfrac{3+\lambda}{3},\lambda\right)$.

4. Examen 8 (reserva 2 2012 – Propuesta B)

3B. Un grupo de amigos se reúne cada sábado en la misma cafetería. Hace dos sábados tomaron 4 cafés, 6 refrescos y 2 infusiones, siendo el precio total 15,40 euros. El sábado pasado tomaron 5 cafés, 4 refrescos y 3 infusiones, siendo el precio total 14,40 euros. Hoy sábado han pedido 3 cafés, 8 refrescos y 1 infusión. Cuando piden la cuenta, el camarero les dice que el precio total es de 18 euros. Se pide:

a) Plantea un sistema de ecuaciones lineales con los datos del enunciado anterior.

b) Asumiendo que los dos sábados anteriores los precios totales estaban bien calculados y que los precios de los cafés, los refrescos e infusiones no han cambiado, razona que hay un error en la cuenta de este sábado.

Solución.

a) Llamemos x al precio de un café, y al precio de un refresco y z al precio de una infusión. Entonces, según el enunciado del problema, podemos plantear el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} 4x+6y+2z=15,40 \\ 5x+4y+3z=14,40 \\ 3x+8y+z=18 \end{cases}$$

b) Usemos el método de Gauss para resolver el sistema anterior:

$$\begin{pmatrix} 4 & 6 & 2 & 15,4 \\ 5 & 4 & 3 & 14,4 \\ 3 & 8 & 1 & 18 \end{pmatrix} \xrightarrow[4f_3-3f_1]{4f_2-5f_1} \begin{pmatrix} 4 & 6 & 2 & 15,4 \\ 0 & -14 & 2 & -19,4 \\ 0 & 14 & -2 & 25,8 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_3+f_2} \begin{pmatrix} 4 & 6 & 2 & 15,4 \\ 0 & -14 & 2 & -19,4 \\ 0 & 0 & 0 & 6,4 \end{pmatrix}$$

Esto nos lleva a la ecuación contradictoria $0z=6,4$. Por tanto, el sistema es incompatible (no tiene solución), cosa que ya nos indica que debe haber un error en la cuenta. Puesto que los dos sábados anteriores los precios totales estaban bien calculados, si eliminamos la tercera ecuación nos queda el sistema siguiente:

$$\begin{cases} 4x+6y+2z=15,4 \\ -14y+2z=-19,4 \end{cases}$$

Llamando $y=\lambda$, el sistema se convierte en este otro:

$$\begin{cases} 4x+2z=15,4-6\lambda \\ 2z=-19,4+14\lambda \end{cases}$$

De la segunda ecuación $z=\dfrac{-19,4+14\lambda}{2}\Rightarrow z=7\lambda-9,7$.

Sustituyendo en la primera: $4x+2(7\lambda-9,7)=15,4-6\lambda\Rightarrow 4x+14\lambda-19,4=15,4-6\lambda\Rightarrow$

$\Rightarrow 4x=-20\lambda+34,8\Rightarrow x=-5\lambda+8,7$.

Debe ser, por tanto, la tercera ecuación (la cuenta de este sábado) la que tenga un error, pues si sustituimos tenemos:

$3x+8y+z=18\Rightarrow 3(-5\lambda+8,7)+8\lambda+7\lambda-9,7=18\Rightarrow -15\lambda+26,1+8\lambda+7\lambda-9,7=18\Rightarrow 16,4=18$

Y esto último es una contradicción.

Aquí acaba el problema, pero, por cierto, puesto que los precios deben ser mayores que cero, podemos sacar las siguientes consecuencias:

$$\begin{cases} y=\lambda>0 \\ z=7\lambda-9,7>0 \\ x=-5\lambda+8,7>0 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} \lambda>0 \\ 7\lambda>9,7 \\ 5\lambda<8,7 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} \lambda>0 \\ \lambda>9,7/7\cong 1,39 \\ \lambda<8,7/5=1,74 \end{cases}$$

Esto nos lleva a decidir que el precio del refresco está entre $1,39$ euros y $1,74$ euros. Por ejemplo, si estuviera a $1,5$ euros (cosa razonable), el precio del café sería $-5\cdot 1,5+8,7=1,2$ euros; y el precio de la infusión $7\cdot 1,5-9,7=0,8$ euros. Si esto fuera así, la cuenta de este sábado ascendería a $3\cdot 1,2+8\cdot 1,5+0,8=16,4$ euros, cosa que ya sabíamos (sean quienes sean x, y, z, teníamos que $3x+8y+z=16,4$) ¿Qué ha podido ocurrir? Pues que el camarero haya cobrado tres infusiones en lugar de una: $3\cdot 1,2+8\cdot 1,5+3\cdot 0,8=18$. O sea los 18 euros que cobró. ¿Fue despiste? ¿O se metió deliberadamente 1,60 euros en el bolsillo? No sabemos.

Moraleja: hay que estar atento a la cuenta en los locales de restauración.

5. Examen 12 (septiembre 2013 – Propuesta B)

3B. a) Discute el siguientes sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $m\in\mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x+y-5z=-1 \\ 2x-y-3z=1-m \\ x-2y+2z=m \end{cases}$$

b) Calcula la solución cuando el sistema sea compatible indeterminado.

Solución.

a) La matriz de los coeficientes es $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -5 \\ 2 & -1 & -3 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$, cuyo rango es al menos dos porque contiene un menor de orden dos distinto de cero: $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}=-1-2=-3$. Pero es que además $|A|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & -5 \\ 2 & -1 & -3 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix}=0$, porque la tercera fila es igual a la segunda menos la primera, con lo que el rango de A no puede ser tres. Entonces $r(A)=2$.

La matriz ampliada es $A'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 1-m \\ 1 & -2 & 2 & m \end{pmatrix}$. Calculemos los menores de orden tres que contiene al menor de orden dos distinto de cero expresado en el apartado a). Esto es, vamos a orlar con $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$.

El primero de ellos coincide con el determinante de A, que ya hemos visto que es igual a cero. Y el segundo es:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1-m \\ 1 & -2 & m \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} c_2 - c_1 \\ c_3 + c_2 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & -m \\ 1 & -3 & m-2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & -m \\ -3 & m-2 \end{vmatrix} = -3\begin{vmatrix} 1 & -m \\ 1 & m-2 \end{vmatrix} = -3(m-2+m) = -3(2m-2)$$

Como $-3(2m-2) = 0 \Leftrightarrow m = 1$, podemos concluir lo siguiente:

- Si $m \neq 1,\ r(A) = 2 \neq 3 = r(A')$ y el sistema es incompatible (no tiene solución).
- Si $m = 1,\ r(A) = r(A') = 2 < 3 = n$ y el sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones).

b) Cuando $m = 1$ es sistema es el siguiente: $\begin{cases} x + y - 5z = -1 \\ 2x - y - 3z = 0 \\ x - 2y + 2z = 1 \end{cases}$. De este sistema podemos eliminar la tercera ecuación (ya hemos visto que es igual a la segunda menos la tercera), con lo que el sistema ahora quedará del siguiente modo: $\begin{cases} x + y - 5z = -1 \\ 2x - y - 3z = 0 \end{cases}$. Llamando $z = \lambda$: $\begin{cases} x + y - 5\lambda = -1 \\ 2x - y - 3\lambda = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 5\lambda - 1 \\ 2x - y = 3\lambda \end{cases}$.

Y ahora, usando la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 5\lambda - 1 & 1 \\ 3\lambda & -1 \end{vmatrix}}{-3} = \frac{-5\lambda + 1 - 3\lambda}{-3} = \frac{8\lambda - 1}{3} \ ; \ y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 5\lambda - 1 \\ 2 & 3\lambda \end{vmatrix}}{-3} = \frac{3\lambda - 10\lambda + 2}{-3} = \frac{7\lambda - 2}{3}$$

Conclusión: si $m = 1$ las soluciones son $(x, y, z) = \left(\frac{8\lambda - 1}{3}, \frac{7\lambda - 2}{3}, \lambda \right)$.

6. Examen 14 (reserva 1 2013 – Propuesta B)

3B. Dado el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ -4x - 2y + mz = 0 \\ 3x + y + 2z = 0 \end{cases} \qquad m \in \mathbb{R}$$

a) ¿Existe algún valor del parámetro m para el que el sistema sea incompatible?
b) Estudia para qué valor del parámetro m el sistema tiene alguna solución distinta de la trivial $x = y = z = 0$.
c) Resuelve el sistema para rodos los valores de $x \in \mathbb{R}$.

Solución.

a) Se trata de un sistema homogéneo (en los sistemas homogéneos todos los términos independientes son iguales a cero). Evidentemente, en estos casos, el rango de la matriz de los coeficientes es igual al rango de la matriz ampliada, $r(A) = r(A') = r$ (al añadir una columna de ceros el rango no puede aumentar), con lo que el sistema siempre tiene solución. Si $r = n$ (don n es el número de incógnitas), el sistema es compatible determinado y su única solución se llama solución trivial: $x = y = z = 0$. Si $r < n$ el sistema será compatible indeterminado (infinitas soluciones). Por tanto, no existe ningún valor del parámetro m para el que el sistema sea incompatible.

b) La matriz de los coeficientes es $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ -4 & -2 & m\\ 3 & 1 & 2\end{pmatrix}$, cuyo rango es al menos dos, pues existe un menor de orden dos distinto de cero: $\begin{vmatrix}1 & 1\\ 3 & 1\end{vmatrix}=1-3=-2$. Calculemos el determinante de A:

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & 1 & -1\\ -4 & -2 & m\\ 3 & 1 & 2\end{vmatrix}=\begin{bmatrix}c_2-c_1\\ c_3+c_2\end{bmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ -4 & 2 & m-2\\ 3 & -2 & 3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2 & m-2\\ -2 & 3\end{vmatrix}=\left[f_2+f_1\right]=\begin{vmatrix}2 & m-2\\ 0 & m+1\end{vmatrix}=2m+2.$$

Entonces $|A|=0\Leftrightarrow 2m+2=0\Leftrightarrow m=-1$. Llamemos, como hemos hecho en el apartado anterior, r al rango tanto de la matriz de los coeficientes como de la matriz ampliada. Entonces, podemos deducir los siguiente:

- Si $m\neq-1$, $r=3=n$, y el sistema será compatible determinado (solución única: $x=y=z=0$).
- Si $m=-1$, $r=2<3=n$, y el sistema será compatible indeterminado (infinitas soluciones).

c) Ya hemos visto en el apartado anterior que si $m\neq-1$, la solución es única (la trivial): $x=y=z=0$.

Si $m=-1$ tanto el rango de la matriz ampliada como la de los coeficientes es dos, con lo que podemos eliminar una ecuación. Eliminemos la segunda, llamemos $z=\lambda$ y escribamos el sistema de la forma equivalente (esto lo hacemos porque el menor de orden dos distinto de cero que hemos tomado está formado por la primera y segunda columna y la primer y tercera filas): $\begin{cases}x+y-z=0\\ 3x+y+2z=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x+y-\lambda=0\\ 3x+y+2\lambda=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x+y=\lambda\\ 3x+y=-2\lambda\end{cases}$.

Apliquemos ahora la regla de Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix}\lambda & 1\\ -2\lambda & 1\end{vmatrix}}{-2}=\frac{\lambda-(-2\lambda)}{-2}=-\frac{3\lambda}{2}\ ;\ y=\frac{\begin{vmatrix}1 & \lambda\\ 3 & -2\lambda\end{vmatrix}}{-2}=\frac{-2\lambda-3\lambda}{-2}=\frac{5\lambda}{2}$$

Conclusión, las soluciones si $m=-1$ son $(x,y,z)=\left(-\frac{3\lambda}{2},\frac{5\lambda}{2},\lambda\right)=\lambda\left(-\frac{3}{2},\frac{5}{2},1\right)$.

Por cierto, desde el punto de vista geométrico, las soluciones son los puntos de la recta que pasa por el origen de coordenadas y cuya dirección es la del vector $\vec{u}=(-3,5,2)$.

7. Examen 15 (reserva 2 2013 – Propuesta A)

3A. a) Discute el siguientes sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $m\in\mathbb{R}$:

$$\begin{cases}2y-z=m\\ 3x-2z=11\\ y+z=6\\ 2x+y-4z=m\end{cases}$$

b) Calcula la solución cuando el sistema sea compatible determinado.

Solución.

a) La matriz de los coeficientes es $A=\begin{pmatrix}0 & 2 & -1\\ 3 & 0 & -2\\ 0 & 1 & 1\\ 2 & 1 & -4\end{pmatrix}$.

Puesto que $\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 6 = -6 \neq 0$, el rango de A es al menos dos. Además:

$\begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -3\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -3\left(2-(-1)\right) = -3\cdot 3 = -9 \neq 0$, lo que indica que $r(A) = 3$.

La matriz ampliada es $A' = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & m \\ 3 & 0 & -2 & 11 \\ 0 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 1 & -4 & m \end{pmatrix}$, cuyo rango es al menos tres porque contiene un menor de orden tres (justo el calculado anteriormente) distinto de cero. Calculemos ahora el valor del determinante de A o menor principal: $\begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 & m \\ 3 & 0 & -2 & 11 \\ 0 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 1 & -4 & m \end{vmatrix} = -3\begin{vmatrix} 2 & -1 & m \\ 1 & 1 & 6 \\ 1 & -4 & m \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & -1 & m \\ 0 & -2 & 11 \\ 1 & 1 & 6 \end{vmatrix} = (*)$. Calculemos aparte los dos determinantes de orden 3: $\begin{vmatrix} 2 & -1 & m \\ 1 & 1 & 6 \\ 1 & -4 & m \end{vmatrix} = (2m-6-4m)-(m-m-48) = -2m-6+48 = -2m+42$;

$\begin{vmatrix} 2 & -1 & m \\ 0 & -2 & 11 \\ 1 & 1 & 6 \end{vmatrix} = (-24-11)-(-2m+22) = -35+2m-22 = 2m-57$. Entonces:

$(*) = -3(-2m+42)-2(2m-57) = 6m-126-4m+114 = 2m-12 = 0 \Leftrightarrow m = 6$.

De este modo llegamos a la siguiente conclusión:

- Si $m \neq 6$, $r(A) = 3 \neq 4 = r(A')$ y el sistema es incompatible (no tiene solución).
- Si $m = 6$, $r(A) = r(A') = 3 = n$ y el sistema es compatible determinado (solución única).

b) Como hemos visto anteriormente, calcularemos la solución cuando $m = 6$. En este caso el sistema queda de la siguiente manera: $\begin{cases} 2y - z = 6 \\ 3x - 2z = 11 \\ y + z = 6 \\ 2x + y - 4z = 6 \end{cases}$. Para hallar la solución podemos eliminar la última ecuación y aplicar la regla de Cramer: $x = \dfrac{\begin{vmatrix} 6 & 2 & -1 \\ 11 & 0 & -2 \\ 6 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{-9} = \dfrac{(-24-11)-(22-12)}{-9} = \dfrac{-35-10}{-9} = \dfrac{-45}{-9} = 5$;

$y = \dfrac{\begin{vmatrix} 0 & 6 & -1 \\ 3 & 11 & -2 \\ 0 & 6 & 1 \end{vmatrix}}{-9} = \dfrac{-18-18}{-9} = \dfrac{-36}{-9} = 4$; $z = \dfrac{\begin{vmatrix} 0 & 2 & 6 \\ 3 & 0 & 11 \\ 0 & 1 & 6 \end{vmatrix}}{-9} = \dfrac{18-36}{-9} = \dfrac{-18}{-9} = 2$.

8. Examen 16 (reserva 2 2013 – Propuesta B)

3B. Évariste Galois, Niels Abel y Srinivasa Ramanujan fueron genios matemáticos que antes de sus prematuras muertes dejaron desarrollada una importante obra matemática. Calcula las edades que tenían cuando fallecieron, sabiendo que su suma es 78, que su media aritmética coincide con la edad de Abel, y que cuatro veces la edad de Ramanujan más dos veces la de Abel es nueve veces la de Galois.

Solución.

Llamemos x, y, z a las edades que tenían Évariste Galois, Niels Abel y Srinivasa Ramanujan, respectivamente, cuando fallecieron. Según el enunciado del problema podemos plantear el siguientes sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas.

$$\begin{cases} x+y+z=78 \\ \dfrac{x+y+z}{3}=y \\ 4z+2y=9x \end{cases}$$

El sistema anterior es equivalente a este otro:

$$\begin{cases} x+y+z=78 \\ x-2y+z=0 \\ 9x-2y-4z=0 \end{cases}$$

Vamos a resolverlo haciendo uso del método de Gauss.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 78 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 9 & -2 & -4 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[f_3-9f_1]{f_2-f_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 78 \\ 0 & -3 & 0 & -78 \\ 0 & -11 & -13 & -702 \end{pmatrix} \xrightarrow{-f_2 \leftrightarrow -f_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 78 \\ 0 & 11 & 13 & 702 \\ 0 & 3 & 0 & 78 \end{pmatrix}$$

El sistema asociada a la última matriz es:

$$\begin{cases} x+y+z=78 \\ 11y+13z=702 \\ 3y=78 \end{cases}$$

De la última ecuación: $3y=78 \Rightarrow y=26$.

Sustituyendo en la segunda: $11\cdot 26+13z=702 \Rightarrow 13z=702-286 \Rightarrow 13z=416 \Rightarrow z=32$.

Y sustituyendo en la primera: $x+26+32=78 \Rightarrow x=78-26-32 \Rightarrow x=20$.

Así pues, cuando fallecieron, Évariste Galois tenía 20 años, Niels Abel 26 y Srinivasa Ramanujan 32.

9. Examen 18 (junio 2014 – Propuesta B)

3B. a) Se sabe que el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} x-2y+3z=4 \\ 2x-y+z=8 \\ x-5y+az=4 \end{cases}$$

es compatible indeterminado. Calcula a y resuelve el sistema para dicho valor del parámetro.

b) Para el valor de a encontrado, da una solución particular del sistema tal que $x=y$.

Solución.

a) La matriz de los coeficientes es $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ 2 & -1 & 1\\ 1 & -5 & a\end{pmatrix}$ y la matriz ampliada es $A'=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3 & 4\\ 2 & -1 & 1 & 8\\ 1 & -5 & a & 4\end{pmatrix}$. Como se sabe que el sistema es compatible indeterminado ha de ser $r(A)=r(A')=2<n$ (donde n es el número de incógnitas). Y para que esto ocurra, en primer lugar el determinante de la matriz A debe ser igual a cero.

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & -2 & 3\\ 2 & -1 & 1\\ 1 & -5 & a\end{vmatrix}=\begin{bmatrix}f_2-2f_1\\ f_3-f_1\end{bmatrix}=\begin{vmatrix}1 & -2 & 3\\ 0 & 3 & -5\\ 0 & -3 & a-3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3 & -5\\ -3 & a-3\end{vmatrix}=3\begin{vmatrix}1 & -5\\ -1 & a-3\end{vmatrix}=3(a-3-5)=3(a-8).$$

Entonces, $|A|=0 \Leftrightarrow 3(a-8)=0 \Leftrightarrow a=8$.

Para este valor de a, la matriz ampliada es $A'=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3 & 4\\ 2 & -1 & 1 & 8\\ 1 & -5 & 8 & 4\end{pmatrix}$, cuyo rango es igual que el de la matriz A porque la cuarta columna es proporcional a la primera.

Por tanto, hemos demostrado que si el sistema es compatible indeterminado, debe ser $a=8$.

Para este valor del parámetro, y puesto que $r(A)=r(A')=r=2<3=n$, podemos eliminar una ecuación (la tercera por ejemplo) y, puesto que el grado de libertad es $g=n-r=3-2=1$, podemos llamar $z=\lambda$ y pasar esta al segundo miembro. De este modo queda el sistema siguiente:

$$\begin{cases}x-2y=4-3\lambda\\ 2x-y=8-\lambda\end{cases}$$

Ahora, usando la regla de Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix}4-3\lambda & -2\\ 8-\lambda & -1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & -2\\ 2 & -1\end{vmatrix}}=\frac{-4+3\lambda-(-16+2\lambda)}{-1-(-4)}=\frac{\lambda+12}{3}\ ;\ y=\frac{\begin{vmatrix}1 & 4-3\lambda\\ 2 & 8-\lambda\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & -2\\ 2 & -1\end{vmatrix}}=\frac{8-\lambda-(8-6\lambda)}{-1-(-4)}=\frac{5\lambda}{3}$$

Así, las infinitas soluciones del sistema las podemos expresar así: $(x,y,z)=\left(\frac{\lambda+12}{3},\frac{5\lambda}{3},\lambda\right)$

b) Supongamos que $a=8$ y que $x=y$. Entonces: $\frac{\lambda+12}{3}=\frac{5\lambda}{3}\Rightarrow\lambda+12=5\lambda\Rightarrow 4\lambda=12\Rightarrow\lambda=3$. Por tanto, para este valor de λ una solución particular del sistema es $(x,y,z)=(5,5,3)$.

10. Examen 22 (junio 2015 – Propuesta B)

3B. He pensado un número de tres cifras tal que la cifra de las decenas es la media aritmética de las otras dos. Además, si a dicho número se le resta el que resulta de invertir el orden de sus cifras, la diferencia es 198. Por último, las tres cifras de mi número suman 12.

a) Plantea un sistema de ecuaciones lineales que recoja la información anterior y clasifícalo. Para ello, puede serte útil observar que al número cuya cifra de las centenas es x, la de las decenas y, y la de las unidades z, puede expresarse como $100x+10y+z$.

b) Determina, si el problema tiene solución, el número de tres cifras que he pensado.

Solución.

a) Tal y como se expresa en el enunciado, llamaremos x a la cifra de las centenas, y a la de las decenas y z a las de las unidades. Expresemos en lenguaje algebraico cada una de las afirmaciones:

- La cifra de las decenas es la media aritmética de las otras dos: $y=\dfrac{x+z}{2}\Rightarrow 2y=x+z\Rightarrow x-2y+z=0$.
- Si a dicho número se le resta el que resulta de invertir el orden de sus cifras la diferencia es 198. Hemos de observar que el número es $100x+10y+z$. Si se invierten sus cifras es $100z+10y+x$. Entonces: $(100x+10y+z)-(100z+10y+x)=198\Rightarrow 99x-99z=198\Rightarrow x-z=2$
- Las tres cifras de mi número suman 12: $x+y+z=12$.

Por tanto, podemos plantear el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x-2y+z=0 \\ x-z=2 \\ x+y+z=12 \end{cases}$$

b) Resolvamos el sistema anterior haciendo uso del método de Gauss (aunque también sería muy fácil despejando x de la segunda ecuación y sustituyendo su valor en las otras dos).

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 12 \end{pmatrix} \xrightarrow[f_3-f_1]{f_2-f_1} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 12 \end{pmatrix} \xrightarrow[f_3/3]{f_2/2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

El sistema asociado a la última matriz es

$$\begin{cases} x-2y+z=0 \\ y-z=1 \\ y=4 \end{cases}$$

Sustituyendo $y=4$ en la segunda ecuación, $4-z=1\Rightarrow z=3$. Sustituyendo ahora los valores de y y de z en la primera ecuación, $x-2\cdot 4+3=0\Rightarrow x-8+3=0\Rightarrow x=5$.

Por tanto, el número de tres cifras que he pensado es el 543. Hagamos la comprobación.

- La cifra de las decenas es la media aritmética de las otras dos: $4=\dfrac{5+3}{2}$.
- Si al número se le resta el que resulta de invertir el orden de sus cifras la diferencia es 198: $543-345=198$.
- Las tres cifras de mi número suman 12: $5+4+3=12$.

11. Examen 23 (septiembre 2015 – Propuesta A)

3A. a) Enuncia el Teorema de Rouché-Fröbenius.

b) Razona que el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} x+3y-3z=4 \\ 2x-y+z=1 \\ 3x+2y-az=5 \end{cases} \qquad a\in\mathbb{R}$$

no es incompatible para ningún valor de $a\in\mathbb{R}$.

c) Resuelve el sistema en el caso en que sea compatible indeterminado.

Solución.

a) Enunciado del teorema de Rouché-Fröbenius.

Sea $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ...+ a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ...+ a_{2n}x_n = b_2 \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ...+ a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$ un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas y sean también $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ..... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ..... & a_{2n} \\ .... \\ a_{m1} & a_{m2} & ..... & a_{mn} \end{pmatrix}$ y $A' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ..... & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & ..... & a_{2n} & b_2 \\ .... \\ a_{m1} & a_{m2} & ..... & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$ la matriz de los coeficientes y la matriz ampliada, respectivamente, asociadas al sistema. Llamemos $r(A)$ al rango de la matriz A y $r(A')$ al rango de la matriz A'. Entonces:

1) Si $r(A) \neq r(A')$, el sistema es incompatible.
2) Si $r(A) = r(A') = r$, el sistema es compatible. En este caso tenemos además:
   - Si $r = n$, el sistema es compatible determinado (solución única).
   - Si $r < n$, el sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones). En este caso se pueden expresar r incógnitas en función de las $n - r$ restantes. Al número $n - r$ se le llama grado de libertad del sistema.

b) La matriz de los coeficientes del sistema es $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -a \end{pmatrix}$, cuyo rango es por lo menos dos, ya que contiene un menor de orden dos distinto de cero. $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 6 = -7 \neq 0$. Además, el determinante de la matriz A (menor principal) es $|A| = (a + 9 - 12) - (9 - 6a + 2) = a - 3 - 11 + 6a = 7a - 14$, con lo que $|A| = 0 \Leftrightarrow 7a - 14 = 0 \Leftrightarrow a = 2$, de donde podemos deducir lo siguiente:

- Si $a \neq 2$, $r(A) = 3$.
- Si $a = 2$, $r(A) = 2$.

La matriz ampliada del sistema es $A' = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -a & 5 \end{pmatrix}$.

Evidentemente, si $a \neq 2$, $r(A') = r(A) = 3 = n$ y el sistema será compatible determinado (solución única).

Ahora bien, si $a = 2$, la matriz de ampliada es $A' = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -2 & 5 \end{pmatrix}$, cuyo rango es dos, ya que la tercera fila es igual a la primera más la segunda. Entonces, en este caso, $r(A) = r(A') = 2 < 3 = n$ y el sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones).

Conclusión: sea que sea $a \in \mathbb{R}$, el sistema nunca es incompatible.

c) Ya hemos visto que el sistema es compatible indeterminado cuando $a = 2$. En este caso podemos eliminar la tercera ecuación (es suma de las otras dos), llamar a $z = \lambda$ (el grado de libertad es igual a uno) y escribir el sistema de la siguiente manera:

$$\begin{cases} x+3y=4+3\lambda \\ 2x-y=1-\lambda \end{cases}$$

Ahora, usando la regla de Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 4+3\lambda & 3 \\ 1-\lambda & -1 \end{vmatrix}}{-7}=\frac{-4-3\lambda-3+3\lambda}{-7}=\frac{-7}{-7}=1\ ;\ y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 4+3\lambda \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix}}{-7}=\frac{1-\lambda-8-6\lambda}{-7}=\frac{-7-7\lambda}{-7}=1+\lambda\,.$$

Por tanto, las soluciones son $(x,y,z)=(1,1+\lambda,\lambda)$.

12. Examen 25 (junio 2016 – Propuesta A)

2B. a) Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $m\in\mathbb{R}$

$$\begin{cases} x-y+mz=0 \\ 4x-3y+2z=m \\ -mx+y-z=1-m \end{cases}$$

b) Calcula la solución cuando el sistema sea compatible indeterminado.

Solución.

a) La matriz de los coeficientes es $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & m \\ 4 & -3 & 2 \\ -m & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Su rango es por lo menos dos porque contiene un menor de orden dos distinto de cero: $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix}=-3-(-4)=-3+4=1\neq 0$. Calculemos el determinante de A:

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & -1 & m \\ 4 & -3 & 2 \\ -m & 1 & -1 \end{vmatrix}=(3+2m+4m)-(3m^2+4+2)=-3m^2+6m-3=-3(m^2-2m+1)=-3(m-1)^2\,.$$

Entonces $|A|=0\Leftrightarrow -3(m-1)^2=0\Leftrightarrow m=1$. Y de aquí deducimos que:

- Si $m\neq 1$, $r(A)=3$.
- Si $m=1$, $r(A)=2$.

La matriz ampliada es $A'=\begin{pmatrix} 1 & -1 & m & 0 \\ 4 & -3 & 2 & m \\ -m & 1 & -1 & 1-m \end{pmatrix}$.

Está claro que, si $m\neq 1$, $r(A')=r(A)=3=n$, y el sistema es compatible determinado (solución única).

Si $m=1$, la matriz ampliada es $A'=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, cuyo rango es dos porque la tercera fila es proporcional a la primera (es la primera multiplicada por -1). Entonces, en este caso, $r(A)=r(A')=2<3=n$, y el sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones) con grado de libertad $g=n-r=3-2=1$.

b) Ya hemos visto que el sistema es compatible indeterminado cuando $m=1$. En este caso podemos eliminar la terca ecuación (es la primera multiplicada por -1), llamar $z=\lambda$ (el grado de libertad es igual a uno) y plantear el sistema de la siguiente manera:

$$\begin{cases} x-y=-\lambda \\ 4x-3y=1-2\lambda \end{cases}$$

Haciendo uso de la regla de Cramer hallaremos el valor de x y de y.

$$x=\frac{\begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ 1-2\lambda & -3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix}}=\frac{3\lambda-1+2\lambda}{1}=5\lambda-1\ ;\ y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & -\lambda \\ 4 & 1-2\lambda \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix}}=\frac{1-2\lambda+4\lambda}{1}=2\lambda+1.$$

Podemos pues escribir las infinitas soluciones del siguiente modo: $(x,y,z)=(5\lambda-1,2\lambda+1,\lambda)$.

13. Examen 28 (septiembre 2016 – Propuesta B)

3B. a) Enuncia el Teorema de Rouché-Fröbenius.

b) Razona que un sistema de tres ecuaciones lineales con cuatro incógnitas no puede ser compatible determinado.

c) Determina para qué valores del parámetro $a\in\mathbb{R}$ el sistema

$$\begin{cases} 2x+3y-z+2t=2 \\ 5x+y+2z=1 \\ x+8y-5z+6t=a \end{cases}$$

es incompatible.

Solución.

a) Ver el ejercicio 11: Examen 23 (septiembre 2015 – Propuesta A).

b) Un sistema de tres ecuaciones lineales con cuatro incógnitas lo podemos escribir del siguiente modo.

$$\begin{cases} a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z+a_{14}t=b_1 \\ a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z+a_{24}t=b_2 \\ a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z+a_{34}t=b_3 \end{cases}$$

La matriz de los coeficientes es $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}$ cuyo orden es 3×4. Esto indica que su rango es a lo sumo tres: $r(A)\leq 3$ (el rango es, como mucho, el mínimo del número de filas y del número de columnas).

La matriz ampliada es $A'=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & b_3 \end{pmatrix}$, cuyo rango también es a lo sumo tres por la misma razón que se ha expuesto anteriormente: $r(A')\leq 3$.

Si el sistema fuese compatible determinado, por el teorema de Rouché, se tendría que $r(A)=r(A')=4=n$. Pero esto es imposible pues, según se ha razonado, los rangos de la matriz de los coeficientes y de la matriz ampliada son, a lo sumo, tres. Esto indica que el sistema nunca puede ser compatible determinado (es decir, no puede tener solución única).

c) La matriz de los coeficientes es $A=\begin{pmatrix}2 & 3 & -1 & 2\\ 5 & 1 & 2 & 0\\ 1 & 8 & -5 & 6\end{pmatrix}$, cuyo rango es dos, $r(A)=2$, pues todos los menores de orden tres son cero (¡compruébese!), y hay un menor de orden dos distinto de cero: $\begin{vmatrix}2 & 3\\ 5 & 1\end{vmatrix}=2-15=-13\neq 0$.

De otro modo, se puede razonar que $r(A)=2$, porque la tercera fila es igual al triple de la primera menos la segunda y sabemos que el rango de una matriz no cambia si se suprime una fila o una columna que sea combinación lineal de las restantes.

La matriz ampliada es $A'=\begin{pmatrix}2 & 3 & -1 & 2 & 2\\ 5 & 1 & 2 & 0 & 1\\ 1 & 8 & -5 & 6 & a\end{pmatrix}$. Orlando con el menor anterior, $\begin{vmatrix}2 & 3\\ 5 & 1\end{vmatrix}$, tenemos que

$\begin{vmatrix}2 & 3 & 2\\ 5 & 1 & 1\\ 1 & 8 & a\end{vmatrix}=(2a+3+80)-(2+15a+16)=-13a+65=0\Leftrightarrow a=5$ y, en este caso, $r(A')=2$ (esto era lo previsible pues si la tercera fila es igual al triple de la primera menos la segunda, a debe ser igual a cinco).

En definitiva, si $a=5$, entonces $r(A)=r(A')=2<4=n$ y el sistema será compatible indeterminado (infinitas soluciones). Pero si $a\neq 5$, $r(A')=3\neq 2=r(A)$ y el sistema será incompatible (sin soluciones).

Es instructivo hacer este apartado haciendo uso del método de Gauss:

$$\begin{pmatrix}2 & 3 & -1 & 2 & 2\\ 5 & 1 & 2 & 0 & 1\\ 1 & 8 & -5 & 6 & a\end{pmatrix}\xrightarrow[2f_3-f_1]{2f_2-5f_1}\begin{pmatrix}2 & 3 & -1 & 2 & 2\\ 0 & -13 & 9 & -10 & -8\\ 0 & 13 & -9 & 10 & 2a-2\end{pmatrix}\xrightarrow{f_3+f_2}\begin{pmatrix}2 & 3 & -1 & 2 & 2\\ 0 & -13 & 9 & -10 & -8\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2a-10\end{pmatrix}$$

La única manera de no incurrir en contradicción es que $2a-10=0\Rightarrow a=5$ y, en este caso, el sistema será compatible indeterminado. Para resolverlo se recurre al sistema equivalente:

$$\begin{cases}2x+3y-z+2t=2\\ -13y+9z-10z=-8\end{cases}$$

Ahora llamamos $z=\lambda$, $t=\mu$ y reconvertimos el sistema en este otro equivalente:

$$\begin{cases}2x+3y=2+\lambda-2\mu\\ -13y=-8-9\lambda+10\mu\end{cases}$$

Este es un sistema escalonado del que, de la segunda ecuación, es fácil despejar la incógnita y. Luego, sustituyendo su valor en la primera ecuación, se obtiene la incógnita x. Las soluciones dependen de dos parámetros libres (el grado de libertad es igual a dos).

¿Qué significa esta solución desde el punto de vista geométrico? Intentemos explicarlo, aunque suene "un poco extraño".

Como hay cuatro incógnitas estamos trabajando en un espacio de dimensión cuatro (llamado hiperespacio). Una ecuación del tipo $a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z+a_{14}t=b_1$ en un espacio de dimensión cuatro, representa un subespacio de dimensión tres (llamado hiperplano). Las infinitas soluciones del sistema $\begin{cases}2x+3y-z+2t=2\\ -13y+9z-10z=-8\end{cases}$ representan, por tanto, el corte de dos hiperplanos en el hiperespacio que, en este caso, es un plano (un objeto de dimensión dos dentro del hiperespacio de dimensión cuatro).

14. Examen 29 (junio 2017 – Propuesta A)

3A. a) Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} ax - y + z = a - 4 \\ 2x + y - az = a - 1 \\ y - z = -3 \end{cases}$$

b) Resuélvelo razonadamente para el valor $a = -1$.

Solución.

a) La matriz de los coeficientes es $A = \begin{pmatrix} a & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -a \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, cuyo rango es por lo menos dos porque contiene un menor de orden dos distinto de cero: $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 0 = 2 \neq 0$.

Calculemos ahora el determinante de la matriz A o menor principal.

$|A| = \begin{vmatrix} a & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -a \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (-a+2) - (2-a^2) = a^2 - a = a(a-1)$. Entonces $|A| = 0 \Leftrightarrow a(a-1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a = 1 \end{cases}$. Y de aquí se deduce el rango de la matriz A, $r(A)$, dependiendo de los valores del parámetro a:

- Si $a \neq 0$ y $a \neq 1$, el determinante de A es distinto de cero, con lo que $r(A) = 3$.
- Si $a = 0$ o bien $a = 1$, $r(A) = 2$.

La matriz ampliada es $A' = \begin{pmatrix} a & -1 & 1 & a-4 \\ 2 & 1 & -a & a-1 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$. Estudiemos su rango y el carácter del sistema según los valores del parámetro a:

- Si $a \neq 0$ y $a \neq 1$, $r(A) = r(A') = 3 = n$ y el sistema es compatible determinado (solución única).
- Si $a = 0$, la matriz ampliada es $A' = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & -4 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$, cuyo rango es tres pues contiene un menor de orden tres distinto de cero: $\begin{vmatrix} 0 & -1 & -4 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} -1 & -4 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -2(3+4) = -14 \neq 0$. Por tanto, en este caso tenemos que $r(A) = 2 \neq 3 = r(A')$ y el sistema es incompatible (no tiene solución).
- Si $a = 1$, la matriz ampliada es $A' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$, cuyo rango también es tres pues contiene un menor de orden tres distinto de cero: $\begin{vmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix} = (-3-6) - 6 = -15 \neq 0$. Por tanto, también en este caso tenemos que $r(A) = 2 \neq 3 = r(A')$ y el sistema es incompatible (no tiene solución).

b) Si $a=-1$ el sistema es compatible determinado y, como $|A|=a(a-1)$, sustituyendo tenemos que $|A|=2$. En este caso el sistema es el siguiente

$$\begin{cases} -x-y+z=-5 \\ 2x+y+z=-2 \\ y-z=-3 \end{cases}$$

Usando la regla de Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} -5 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{2}=\frac{(5+3-2)-(-3-2-5)}{2}=\frac{6-(-10)}{2}=\frac{16}{2}=8.$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} -1 & -5 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & -1 \end{vmatrix}}{2}=\frac{(-2-6)-(10+3)}{2}=\frac{-8-13}{2}=-\frac{21}{2}.$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix} -1 & -1 & -5 \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix}}{2}=\frac{(3-10)-(6+2)}{2}=\frac{-7-8}{2}=-\frac{15}{2}$$

15. Examen 31 (septiembre 2017 – Propuesta A)

3A. a) Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $a\in\mathbb{R}$.

$$\begin{cases} ax+y+z=1 \\ x+ay+z=0 \\ x+y+az=0 \end{cases}$$

b) Resuélvelo razonadamente para el valor $a=0$.

Solución.

---

a) La matriz de los coeficientes es $A=\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$. Calculemos su determinante.

$|A|=\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix}=(a^3+1+1)-(a+a+a)=a^3-3a+2=(a-1)^2(a+2)$. Entonces deducimos que

$|A|=0\Leftrightarrow(a-1)^2(a+2)=0\Leftrightarrow\begin{cases} a=1 \\ a=-2 \end{cases}$, lo que nos lleva necesariamente a la siguiente conclusión:

- Si $a\neq1$ y $a\neq-2$, entonces $r(A)=3$.
- Si $a=1$, la matriz de los coeficientes es $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, y claramente $r(A)=1$.

- Si $a=-2$, la matriz de los coeficientes es $A=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 1\\ 1 & -2 & 1\\ 1 & 1 & -2\end{pmatrix}$, y también claramente $r(A)=2$.

La matriz ampliada es $A'=\begin{pmatrix}a & 1 & 1 & 1\\ 1 & a & 1 & 0\\ 1 & 1 & a & 0\end{pmatrix}$. Estudiemos su rango y clasifiquemos el sistema según los distintos valores del parámetro a.

- Está claro que si $a\neq 1$ y $a\neq -2$, entonces $r(A')=r(A)=3=n$, con lo que el sistema es compatible determinado (solución única).
- Si $a=1$, la matriz ampliada es $A'=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$, cuyo rango no puede ser tres (las dos últimas filas son iguales). Por contener un menor de orden dos distinto de cero, $\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix}=-1$, su rango será dos, es decir, $r(A')=2\neq 1=r(A)$, con lo que, en este caso, el sistema es incompatible (no tiene solución).
- Si $a=-2$, la matriz ampliada es $A'=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 1 & 1\\ 1 & -2 & 1 & 0\\ 1 & 1 & -2 & 0\end{pmatrix}$, cuyo rango es tres pues hay un menor de orden tres distinto de cero: $\begin{vmatrix}-2 & 1 & 1\\ 1 & -2 & 0\\ 1 & 1 & 0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & -2\\ 1 & 1\end{vmatrix}=1-(-2)=3\neq 0$. Entonces, en este último caso tenemos que $r(A')=3\neq 2=r(A)$ y el sistema también es incompatible (no tiene solución).

b) Si $a=0$, el sistema es el siguiente:

$$\begin{cases}y+z=1\\ x+z=0\\ x+y=0\end{cases}$$

Tal y como se ha visto, este sistema es compatible determinado (solución única). Además, sustituyendo en $|A|=(a-1)^2(a+2)$, se tiene que $|A|=2$. Ahora, aplicando la regla de Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{vmatrix}}{2}=\frac{-\begin{vmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{vmatrix}}{2}=-\frac{1}{2}\ ;\ y=\frac{\begin{vmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{vmatrix}}{2}=\frac{\begin{vmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{vmatrix}}{2}=\frac{1}{2}\ ;\ z=\frac{\begin{vmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\end{vmatrix}}{2}=\frac{\begin{vmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{vmatrix}}{2}=\frac{1}{2}.$$

16. Examen 33 (junio 2018 – Propuesta A)

3A. a) Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $a\in\mathbb{R}$.

$$\begin{cases}x+3y-az=4\\ x+ay+z=2\\ x+4y-5z=6\end{cases}$$

b) Resuélvelo razonadamente para el valor $a=2$.

Solución.

a) La matriz de los coeficientes es $A=\begin{pmatrix}1 & 3 & -a\\ 1 & a & 1\\ 1 & 4 & -5\end{pmatrix}$, cuyo rango es por lo menos dos porque contiene un menor de orden dos distinto de cero: $\begin{vmatrix}1 & 3\\ 1 & 4\end{vmatrix}=4-3=1\neq 0$.

Calculemos ahora el determinante de la matriz A o menor principal.

$|A|=\begin{vmatrix}1 & 3 & -a\\ 1 & a & 1\\ 1 & 4 & -5\end{vmatrix}=(-5a+3-4a)-(-a^2-15+4)=a^2-9a+14=(a-2)(a-7)$. Entonces

$|A|=0\Leftrightarrow(a-2)(a-7)=0\Leftrightarrow\begin{cases}a=2\\ a=7\end{cases}$. Y de aquí se deduce el rango de la matriz A, $r(A)$, dependiendo de los valores del parámetro a:

- Si $a\neq 2$ y $a\neq 7$, el determinante de A es distinto de cero, con lo que $r(A)=3$.
- Si $a=2$ o bien $a=7$, $r(A)=2$.

La matriz ampliada es $A'=\begin{pmatrix}1 & 3 & -a & 4\\ 1 & a & 1 & 2\\ 1 & 4 & -5 & 6\end{pmatrix}$. Estudiemos su rango y el carácter del sistema según los valores del parámetro a:

- Si $a\neq 2$ y $a\neq 7$, claramente $r(A)=r(A')=3=n$ y el sistema es compatible determinado (solución única).
- Si $a=2$, la matriz ampliada es $A'=\begin{pmatrix}1 & 3 & -2 & 4\\ 1 & 2 & 1 & 2\\ 1 & 4 & -5 & 6\end{pmatrix}$, cuyo rango es dos pues, orlando con $\begin{vmatrix}1 & 3\\ 1 & 4\end{vmatrix}$, el otro menor de orden tres que lo contiene es cero: $\begin{vmatrix}1 & 3 & 4\\ 1 & 2 & 2\\ 1 & 4 & 6\end{vmatrix}=\begin{bmatrix}f_2-f_1\\ f_3-f_1\end{bmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 3 & 4\\ 0 & -1 & -2\\ 0 & 1 & 2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-1 & -2\\ 1 & 2\end{vmatrix}=0$.

  Por tanto, en este caso, $r(A')=r(A)=2<3=n$ y el sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones).
- Si $a=7$, la matriz ampliada es $A'=\begin{pmatrix}1 & 3 & -7 & 4\\ 1 & 7 & 1 & 2\\ 1 & 4 & -5 & 6\end{pmatrix}$, cuyo rango es tres pues contiene un menor de orden tres distinto de cero: $\begin{vmatrix}1 & 3 & 4\\ 1 & 7 & 2\\ 1 & 4 & 6\end{vmatrix}=\begin{bmatrix}f_2-f_1\\ f_3-f_1\end{bmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 3 & 4\\ 0 & 4 & -2\\ 0 & 1 & 2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}4 & -2\\ 1 & 2\end{vmatrix}=8-(-2)=10\neq 0$.

  Entonces, en este caso, $r(A')=3\neq 2=r(A)$ y el sistema es incompatible (no tiene solución).

b) Para $a=2$ ya hemos visto que el sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones). Podemos eliminar una ecuación (por ejemplo la segunda) y dejar libre la incógnita $z=\lambda$ (ya que el grado de libertad es igual a uno: $g=n-r=3-2=1$), obteniendo el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x+3y=4+2\lambda \\ x+4y=6+5\lambda \end{cases}$$

Usando la regla de Cramer (recordemos que habíamos usado el menor $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}=4-3=1$ para orlar: este es el que nos sirve ahora para ahorrar tiempo en cálculos):

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 4+2\lambda & 3 \\ 6+5\lambda & 4 \end{vmatrix}}{1}=(16+8\lambda)-(18-15\lambda)=-7\lambda-2\ ;\ y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 4+2\lambda \\ 1 & 6+5\lambda \end{vmatrix}}{1}=(6+5\lambda)-(4+2\lambda)=3\lambda+2.$$

Por tanto, si $a=2$, las infinitas soluciones las podemos expresar así: $(x,y,z)=(-7\lambda-2,3\lambda+2,\lambda)$.

17. Examen 35 (julio 2018 – Propuesta A)

3A. a) Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $a\in\mathbb{R}$.

$$\begin{cases} x-y-z=1 \\ x+2y+z=-4 \\ x-4y-3z=a^2-3 \end{cases}$$

b) Resuélvelo razonadamente para el valor $a=-3$.

Solución.

a) La matriz de los coeficientes es $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -4 & -3 \end{pmatrix}$, cuyo rango es por lo menos dos porque contiene un menor de orden dos distinto de cero: $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=2-(-1)=2+1=3\neq 0$. Calculemos ahora $|A|$ o menor principal:

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -4 & -3 \end{vmatrix}=\begin{bmatrix} f_2-f_1 \\ f_3-f_1 \end{bmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & -3 & -2 \end{vmatrix}=0.$$ Por tanto, $r(A)=2$.

La matriz ampliada es $A'=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -4 \\ 1 & -4 & -3 & a^2-3 \end{pmatrix}$. Orlando con el menor mencionado, $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$, el único menor de orden tres que lo contiene, además del hallado anteriormente es:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -4 \\ 1 & -4 & a^2-3 \end{vmatrix}=\begin{bmatrix} f_2-f_1 \\ f_3-f_1 \end{bmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -5 \\ 0 & -3 & a^2-4 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ -3 & a^2-4 \end{vmatrix}=3\begin{vmatrix} 1 & -5 \\ -1 & a^2-4 \end{vmatrix}=3(a^2-4-5)=3(a^2-9).$$

Pero $3(a^2-9)=0\Leftrightarrow a^2-9=0\Leftrightarrow a^2=9\Leftrightarrow a=\pm\sqrt{9}\Leftrightarrow\begin{cases} a=-3 \\ a=3 \end{cases}$. Entonces:

- Si $a\neq -3$ y $a\neq 3$, entonces $r(A')=3\neq 2=r(A)$ y el sistema es incompatible (no tiene solución).
- Si $a=3$ o $a=-3$, entonces $r(A')=r(A)=2<3=n$ y el sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones).

b) Si $a=-3$ el sistema es el siguiente:

$$\begin{cases} x-y-z=1 \\ x+2y+z=-4 \\ x-4y-3z=6 \end{cases}$$

Podemos eliminar la tercera fila: es igual a dos veces la primera menos la segunda (bueno, aunque no nos demos cuenta de esto último también la podemos eliminar porque $r(A')=r(A)=2$ con lo que seguro que esta ecuación será combinación lineal de las dos anteriores). Y si llamamos $z=\lambda$ (recordemos que el grado de libertad es $g=3-2=1$), podemos escribir los siguientes sistemas equivalentes:

$$\begin{cases} x-y-z=1 \\ x+2y+z=-4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-y=1+\lambda \\ x+2y=-4-\lambda \end{cases}$$

Usando el método de Gauss (o método de reducción):

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1+\lambda \\ 1 & 2 & -4-\lambda \end{pmatrix} \xrightarrow{f_2-f_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1+\lambda \\ 0 & 3 & -5-2\lambda \end{pmatrix}$$

El sistema asociado a la última matriz es $\begin{cases} x-y=1+\lambda \\ 3y=-5-2\lambda \end{cases}$. De la segunda ecuación, $y=\dfrac{-5-2\lambda}{3}$. Sustituyendo en la primera: $x-\dfrac{-5-2\lambda}{3}=1+\lambda \Rightarrow 3x+5+2\lambda=3+3\lambda \Rightarrow 3x=-2+\lambda \Rightarrow x=\dfrac{-2+\lambda}{3}$. De este modo, las infinitas soluciones las podemos escribir así: $(x,y,z)=\left(\dfrac{-2+\lambda}{3},\dfrac{-5-2\lambda}{3},\lambda\right)$.

Por cierto, si se resuelve el sistema con una calculadora o aplicación matemática, como es el caso del programa Derive obtenemos la siguiente salida.

```
#1:   SOLVE([x - y - z = 1, x + 2·y + z = -4, x - 4·y - 3·z = 6], [x, y, z])

#2:   [x - z/3 = - 2/3 ∧ y + 2·z/3 = - 5/3]
```

Obsérvese, como $z=\lambda$, las soluciones proporcionadas son equivalentes a las halladas anteriormente.

18. Examen 37 (junio 2019 – Propuesta A)

3A. a) Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $a\in\mathbb{R}$.

$$\begin{cases} ax+2y=a^2 \\ -x+y+z=5 \\ x-ay-z=-(4+a) \end{cases}$$

b) Resuélvelo razonadamente para el valor $a=1$.

Solución.

a) La matriz de los coeficientes es $A=\begin{pmatrix} a & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -a & -1 \end{pmatrix}$, cuyo rango es por lo menos dos porque contiene un menor de orden dos distinto de cero: $\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=2-0=2\neq 0$.

Calculemos ahora el determinante de la matriz A o menor principal.

$|A|=\begin{vmatrix} a & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -a & -1 \end{vmatrix}=[f_2+f_3]=\begin{vmatrix} a & 2 & 0 \\ 0 & 1-a & 0 \\ 1 & -a & -1 \end{vmatrix}=(1-a)\begin{vmatrix} a & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}=(1-a)(-a)=a(a-1)$. Entonces

$|A|=0 \Leftrightarrow a(a-1)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ a=1 \end{cases}$. Y de aquí se deduce el rango de la matriz A, $r(A)$, dependiendo de los valores del parámetro a:

- Si $a \neq 0$ y $a \neq 1$, el determinante de A es distinto de cero, con lo que $r(A)=3$.
- Si $a=0$ o bien $a=1$, $r(A)=2$.

La matriz ampliada es $A'=\begin{pmatrix} a & 2 & 0 & a^2 \\ -1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & -a & -1 & -4-a \end{pmatrix}$. Estudiemos su rango y el carácter del sistema según los valores del parámetro a:

- Si $a \neq 0$ y $a \neq 1$, claramente $r(A)=r(A')=3=n$ y el sistema es compatible determinado (solución única).
- Si $a=0$, la matriz ampliada es $A'=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & -1 & -4 \end{pmatrix}$, cuyo rango es tres pues contiene un menor de orden tres distinto de cero: $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & -4 \end{vmatrix}=2\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ -1 & -4 \end{vmatrix}=2(-4+5)=2$. Por tanto, en este caso, se tiene que $r(A')=3 \neq 2=r(A)$, con lo que el sistema es incompatible (no tiene solución).
- Si $a=1$, la matriz ampliada es $A'=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & -1 & -5 \end{pmatrix}$, cuyo rango es dos (las dos últimas filas son proporcionales). Entonces, en este caso, $r(A')=r(A)=2<3=n$ y el sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones).

b) Ya hemos visto anteriormente que cuando $a=1$ el sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones) de grado de libertad uno: $g=n-r=3-2=1$. Podemos eliminar una ecuación (la tercera, por ejemplo) y dejar libre una incógnita: $x=\lambda$. Así, el sistema se puede escribir del siguiente modo:

$$\begin{cases} x+2y=1 \\ -x+y+z=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2y=1-\lambda \\ y+z=5+\lambda \end{cases}$$

De la primera ecuación, $y=\frac{1-\lambda}{2}$. Sustituyendo este valor en la segunda:

$\frac{1-\lambda}{2}+z=5+\lambda \Rightarrow 1-\lambda+2z=10+2\lambda \Rightarrow 2z=9+3\lambda \Rightarrow z=\frac{9+3\lambda}{2}$.

Por tanto, las infinitas soluciones las podemos escribir resumidamente así: $(x,y,z)=\left(\lambda,\frac{1-\lambda}{2},\frac{9+3\lambda}{2}\right)$.

19. Examen 39 (julio 2019 – Propuesta A)

3A. a) Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} x-(a-2)y-z=1 \\ x-2y+z=-4 \\ x-3y+az=-a^2 \end{cases}$$

b) Resuélvelo razonadamente para el valor $a=3$.

Solución.

---

a) La matriz de los coeficientes es $A=\begin{pmatrix} 1 & -(a-2) & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -a+2 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & a \end{pmatrix}$, cuyo rango es por lo menos dos porque contiene un menor de orden dos distinto de cero: $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}=-3-(-2)=-3+2=-1\neq 0$.

Calculemos ahora el determinante de la matriz A o menor principal.

$|A|=\begin{vmatrix} 1 & -a+2 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & a \end{vmatrix}=(-2a-a+2+3)-(2-a^2+2a-3)=a^2-5a+6=(a-2)(a-3)$. Entonces

$|A|=0 \Leftrightarrow (a-2)(a-3)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ a=3 \end{cases}$. Y de aquí se deduce el rango de la matriz A, $r(A)$, dependiendo de los valores del parámetro a:

- Si $a\neq 2$ y $a\neq 3$, el determinante de A es distinto de cero, con lo que $r(A)=3$.
- Si $a=2$ o bien $a=3$, $r(A)=2$.

La matriz ampliada es $A'=\begin{pmatrix} 1 & -a+2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -4 \\ 1 & -3 & a & -a^2 \end{pmatrix}$. Estudiemos su rango y el carácter del sistema según los valores del parámetro a:

- Si $a\neq 2$ y $a\neq 3$, claramente $r(A)=r(A')=3=n$ y el sistema es compatible determinado (solución única).
- Si $a=2$, la matriz ampliada es $A'=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -4 \\ 1 & -3 & -2 & -4 \end{pmatrix}$, cuyo rango es tres pues contiene un menor de orden tres distinto de cero: $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -4 \\ 1 & -3 & -4 \end{vmatrix}=[c_1-c_3]=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 5 & -2 & -4 \\ 5 & -3 & -4 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 5 & -3 \end{vmatrix}=-15+10=-5\neq 0$. Por tanto, en este caso, $r(A')=3\neq 2=r(A)$ y el sistema es incompatible (no tiene solución).

- Si $a=3$, la matriz ampliada es $A'=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -4 \\ 1 & -3 & 3 & -9 \end{pmatrix}$, cuyo rango es dos porque la tercera fila es igual a dos veces la segunda menos la primera. Por tanto, en este caso, $r\left(A'\right)=2=r\left(A\right)<3=n$ y el sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones).

b) Ya hemos visto que para $a=3$ hay infinitas soluciones. Como la tercera ecuación es combinación lineal de las dos primeras la podemos eliminar. Además, como el grado de libertad es uno: $g=n-r=3-2=1$, una de las incógnitas va libre, por ejemplo, $z=\lambda$. Entonces podemos "reescribir" el sistema de la siguiente manera:

$$\begin{cases} x-y-\lambda=1 \\ x-2y+\lambda=-4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-y=1+\lambda \\ x-2y=-4-\lambda \end{cases}$$

Usando la regla de Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 1+\lambda & -1 \\ -4-\lambda & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}}=\frac{-2-\lambda-4-\lambda}{-2+1}=\frac{-6-2\lambda}{-1}=6+2\lambda \ ; \ y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1+\lambda \\ 1 & -4-\lambda \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}}=\frac{-4-\lambda-1-\lambda}{-2+1}=\frac{-5-2\lambda}{-1}=5+2\lambda$$

Por tanto, las soluciones las podemos escribir así: $\left(x,y,z\right)=\left(6+2\lambda,5+2\lambda,\lambda\right)$.