Sistemas de ecuaciones lineales

1. Estudiar el sistema de ecuaciones según los valores del parámetro $a \in \mathbb{R}$.

$$\left.\begin{array}{l} ax + y + z = 2a \\ x - y + z = a - 1 \\ x + (a-1)y + az = a + 3 \end{array}\right\}$$

Resolverlo (si es posible) para $a = -1$.

junio 1997

Solución:

La matriz de los coeficientes es $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & a-1 & a \end{pmatrix}$, cuyo rango es al menos 2 pues existe un menor de orden 2 distinto de cero: $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - (-1) = 2$. Su determinante es:

$$|A| = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & a-1 & a \end{vmatrix} = \left(-a^2 + 1 + a - 1\right) - \left(-1 + a + a^2 - a\right) = \left(-a^2 + a\right) - \left(a^2 - 1\right) = -2a^2 + a + 1.$$

Entonces $|A| = 0 \Leftrightarrow -2a^2 + a + 1 = 0 \Leftrightarrow a = -\frac{1}{2}$ o $a = 1$. Por tanto:

- ✓ Si $a \neq -\frac{1}{2}$ y $a \neq 1 \Rightarrow rango(A) = 3$, pues en estos casos $|A| \neq 0$.
- ✓ Si $a = -\frac{1}{2} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} -1/2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$ y $rango(A) = 2$.
- ✓ Si $a = 1 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y también $rango(A) = 2$.

La matriz ampliada es $B = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 2a \\ 1 & -1 & 1 & a-1 \\ 1 & a-1 & a & a+3 \end{pmatrix}$.

- ✓ Si $a \neq -\frac{1}{2}$ y $a \neq 1 \Rightarrow rango(A) = 3 = rango(B) = n$, donde n es el número de incógnitas. Entonces el sistema es compatible determinado (solución única).
- ✓ Si $a = -\frac{1}{2} \Rightarrow B = \begin{pmatrix} -1/2 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -3/2 \\ 1 & -3/2 & -1/2 & 5/2 \end{pmatrix}$ cuyo rango es 3 pues podemos encontrar al menos un menor de orden 3 distinto de cero:

$$\begin{vmatrix} -1/2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -3/2 \\ 1 & -3/2 & 5/2 \end{vmatrix} = \left(\frac{5}{4}-\frac{3}{2}+\frac{3}{2}\right)-\left(1+\frac{5}{2}-\frac{9}{8}\right)=\frac{5}{4}-\frac{19}{8}=\frac{-9}{8}\neq 0 .$$

En este caso $rango(B)=3\neq rango(A)=2$ y el sistema es incompatible.

✓ Si $a=1 \Rightarrow B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, cuyo rango es 3 pues hay al menos un menor de orden 3 distinto de cero:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix} = (-4+0+0)-(-2+4+0)=-4-2=-6\neq 0 .$$

Por tanto, $rango(B)=3\neq rango(A)=2$ y el sistema también es incompatible.

Si $a=-1$ el sistema es compatible determinado (solución única). El sistema queda así: $\left.\begin{array}{l} -x+y+z=-2 \\ x-y+z=-2 \\ x-2y-z=2 \end{array}\right\}$

En este caso $|A|=\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix}=(-1+1-2)-(-1-1+2)=(-2)-0=-2$. Por la regla de Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix}}=\frac{(-2+2+4)-(-2+2+4)}{-2}=\frac{0}{-2}=0 .$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix}}=\frac{(-2-2+2)-(-2+2-2)}{-2}=\frac{0}{-2}=0 .$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix}}=\frac{(2-2+4)-(2+2-4)}{-2}=\frac{4-0}{-2}=-2 .$$ †

2. Estudiar el sistema según los valores del parámetro $a \in \mathbb{R}$.

$$\left.\begin{array}{l} x + ay + z = 3a \\ x - y + z = 2 \\ ax + y = 4a \end{array}\right\}$$

Resolverlo (si es posible) para $a = 2$.

septiembre 1997

Solución:

La matriz de los coeficientes es $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ a & 1 & 0 \end{pmatrix}$, cuyo rango es al menos 2 pues existe un menor de orden 2 distinto de cero: $\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 1 = -1 \neq 0$.

Su determinante es: $|A| = \begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ a & 1 & 0 \end{vmatrix} = (0 + a^2 + 1) - (-a + 0 + 1) = a^2 + a = a(a+1)$.

Entonces $|A| = 0 \Leftrightarrow a = 0$ ó $a = -1$.

Por tanto:

- ✓ Si $a \neq 0$ y $a \neq -1 \Rightarrow rango(A) = 3$, pues en estos casos $|A| \neq 0$.
- ✓ Si $a = 0 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, con lo que $rango(A) = 2$ (hay un menor de orden 2 distinto de 0).
- ✓ Si $a = -1 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y también, por la misma razón de antes, $rango(A) = 2$.

La matriz ampliada es $B = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 & 3a \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ a & 1 & 0 & 4a \end{pmatrix}$.

- ✓ Si $a \neq 0$ y $a \neq -1 \Rightarrow rango(A) = 3 = rango(B) = n$, donde n es el número de incógnitas, con lo que el sistema es compatible determinado (solución única).
- ✓ Si $a = 0 \Rightarrow B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ cuyo rango es 3, pues $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$.

  En este caso $rango(B) = 3 \neq rango(A) = 2$ y el sistema es incompatible.

✓ Si $a=-1 \Rightarrow B=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & -4 \end{pmatrix}$, cuyo rango es 3, pues $\begin{vmatrix} -1 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -4 \end{vmatrix} = (4+2)-(-3+4)=5\neq 0$.

Obsérvese que hemos calculado el menor de orden tres que contenía al menor de orden dos que ya vimos que era distinto de cero: $\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0-1=-1\neq 0$.

Por tanto, $rango(B)=3\neq rango(A)=2$ y el sistema también es incompatible. Esto es fácil de ver si uno observa las dos primeras filas (¡es imposible que, simultáneamente, $x-y+z=-3$ y $x-y+z=2$!).

Si $a=2$ el sistema es compatible determinado (solución única). El sistema queda así: $\left.\begin{array}{l} x+2y+z=6 \\ x-y+z=2 \\ 2x+y=8 \end{array}\right\}$.

En este caso $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (0+4+1)-(-2+0+1)=5-(-1)=6$ (también se puede calcular en la expresión $|A|=a(a+1)$, haciendo $a=2$).

Por la regla de Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 6 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 8 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}} = \frac{(0+16+2)-(-8+0+6)}{6} = \frac{18-(-2)}{6} = \frac{20}{6} = \frac{10}{3}.$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 8 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}} = \frac{(0+12+8)-(4+0+8)}{6} = \frac{20-12}{6} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}.$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 8 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}} = \frac{(-8+8+6)-(-12+16+2)}{6} = \frac{6-6}{6} = 0.$$ †

3. Dados los planos $\alpha : x+y+z=1$, $\beta : ax+y=1$ y $\gamma : x+(a+1)z=0$, determinar los valores de a para los cuales:
1) los planos se cortan en un solo punto; 2) se cortan en una recta de puntos.

junio 1999

Solución:

Planteemos el sistema formado por los tres planos $\begin{cases} x+y+z=1 \\ ax+y=1 \\ x+(a+1)z=0 \end{cases}$.

La matriz de los coeficientes es: $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & 1 & 0 \\ 1 & 0 & a+1 \end{pmatrix}$, cuyo rango es al menos dos pues hay un menor de orden 2 distinto de cero: $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}=-1$.

El determinante de A es $|A|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & 1 & 0 \\ 1 & 0 & a+1 \end{vmatrix}=(a+1+0+0)-(1+a(a+1)+0)=(a+1)-(1+a^2+a)=-a^2$.

Entonces $|A|=0 \Leftrightarrow -a^2=0 \Leftrightarrow a=0$. Por tanto:

✓ Si $a\neq 0 \Rightarrow rango(A)=3$, pues en este caso $|A|\neq 0$.

✓ Si $a=0 \Rightarrow A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $rango(A)=2$.

La matriz ampliada es $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & a+1 & 0 \end{pmatrix}$.

✓ Si $a\neq 0 \Rightarrow rango(A)=3=rango(B)=n$, donde n es el número de incógnitas, con lo que el sistema es compatible determinado (solución única), y los tres planos se cortan en un punto.

✓ Si $a=0 \Rightarrow B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ cuyo rango es 2 pues todos los menores de orden tres son iguales a cero (¡compruébese). En este caso $rango(A)=2=rango(B)<3=n$, donde n es el número de incógnitas, con lo que el sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones). Por tanto, en este caso los tres planos se cortan en una recta de puntos. †

4. Discutir y resolver, según los diferentes valores del parámetro a, el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x+y+(a+1)z=1 \\ ax=2 \\ ay+2z=0 \end{cases}$$

septiembre 1999

Solución:

La matriz de los coeficientes es $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & a+1 \\ a & 0 & 0 \\ 0 & a & 2 \end{pmatrix}$ y su determinante es:

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & a+1 \\ a & 0 & 0 \\ 0 & a & 2 \end{vmatrix}=\left(0+0+a^3+a^2\right)-\left(0+2a+0\right)=a^3+a^2-2a=a\left(a^2+a-2\right)=a(a-1)(a+2).$$

Entonces $|A|=0 \Leftrightarrow a(a-1)(a+2)=0 \Leftrightarrow a=0$, $a=1$ o $a=-2$. Por tanto:

✓ Si $a\neq 0$, $a\neq 1$ y $a\neq -2 \Rightarrow rango(A)=3$, pues en estos casos $|A|\neq 0$.

✓ Si $a=0 \Rightarrow A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, con lo que $rango(A)=2$, pues hay al menos un menor de orden 2 distinto de cero.

✓ Si $a=1 \Rightarrow A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, con lo que $rango(A)=2$, pues hay al menos un menor de orden 2 distinto de cero.

✓ Si $a=-2 \Rightarrow A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$, con lo que $rango(A)=2$, pues hay al menos un menor de orden 2 distinto de cero.

La matriz ampliada es $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & a+1 & 1 \\ a & 0 & 0 & 2 \\ 0 & a & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

✓ Si $a\neq 0$, $a\neq 1$ y $a\neq -2 \Rightarrow rango(A)=3=rango(B)=n$, donde n es el número de incógnitas, con lo que el sistema es compatible determinado (solución única).

✓ Si $a=0 \Rightarrow B=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&0&0&2\\0&0&2&0\end{pmatrix}$, cuyo rango es 3 pues hay un menor de orden 3 distinto de cero: $\begin{vmatrix}1&1&1\\0&0&2\\0&2&0\end{vmatrix}=-4 \Rightarrow rango(B)=3\neq 2=rango(A)$ y el sistema es incompatible.

✓ Si $a=1 \Rightarrow B=\begin{pmatrix}1&1&2&1\\1&0&0&2\\0&1&2&0\end{pmatrix}$, cuyo rango es 3 pues hay un menor de orden 3 distinto de cero: $\begin{vmatrix}1&1&1\\1&0&2\\0&1&0\end{vmatrix}=1-2=-1 \Rightarrow rango(B)=3\neq 2=rango(A)$ y el sistema es incompatible.

✓ Si $a=-2 \Rightarrow B=\begin{pmatrix}1&1&-1&1\\-2&0&0&2\\0&-2&2&0\end{pmatrix}$ cuyo rango es 3 pues hay un menor de orden 3 distinto de cero: $\begin{vmatrix}1&1&1\\-2&0&2\\0&-2&0\end{vmatrix}=4-(-4)=8 \Rightarrow rango(B)=3\neq 2=rango(A)$ y el sistema es incompatible.

Hallemos la solución para $a\neq 0$, $a\neq 1$ y $a\neq -2$. Para ello, tenemos que recordar que el determinante de A es $|A|=a\left(a^2+a-2\right)=a(a-1)(a+2)$. Ahora aplicamos la regla de Cramer:

$x=\dfrac{\begin{vmatrix}1&1&a+1\\2&0&0\\0&a&2\end{vmatrix}}{a(a-1)(a+2)}=\dfrac{2a(a+1)-4}{a(a-1)(a+2)}=\dfrac{2a^2+2a-4}{a(a-1)(a+2)}=\dfrac{2(a-1)(a+2)}{a(a-1)(a+2)}=\dfrac{2}{a}$ (¡esto ya estaba claro!: no había nada más que ver la segunda ecuación del sistema).

$$y=\dfrac{\begin{vmatrix}1&1&a+1\\a&2&0\\0&0&2\end{vmatrix}}{a(a-1)(a+2)}=\dfrac{4-2a}{a(a-1)(a+2)}.$$

$$z=\dfrac{\begin{vmatrix}1&1&1\\a&0&2\\0&a&0\end{vmatrix}}{a(a-1)(a+2)}=\dfrac{a^2-2a}{a(a-1)(a+2)}=\dfrac{a(a-2)}{a(a-1)(a+2)}=\dfrac{a-2}{(a-1)(a+2)}.$$ †

5. Estudiar la compatibilidad del siguiente sistema de ecuaciones lineales según los diferentes valores del parámetro a, y resolverlo cuando sea posible: $\begin{cases} x-y=5 \\ y+z=a \\ x-2z=3 \\ 2x-3z=a \end{cases}$

junio 2000

Solución:

La matriz de los coeficientes es $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ cuyo rango es 3 pues hay un menor de orden 3 distinto de cero: $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix}=-2-1=-3$ **(*)**.

La matriz ampliada es: $B=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & a \\ 1 & 0 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & -3 & a \end{pmatrix}$.

Hagamos uso de las propiedades de los determinantes para calcular el determinante de la matriz B:

$$|B|=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & a \\ 1 & 0 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & -3 & a \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & a+5 \\ 1 & 0 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & -3 & a \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & a+5 \\ 1 & -2 & 3 \\ 2 & -3 & a \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & a+5 \\ 0 & -3 & -a-2 \\ 0 & -5 & -a-10 \end{vmatrix}=$$

$=\begin{vmatrix} -3 & -a-2 \\ -5 & -a-10 \end{vmatrix}=(3a+30)-(5a+10)=-2a+20$ (al principio se ha sumado a la segunda fila la primera y luego se ha desarrollado por los elementos de la segunda columna).

Entonces $|B|=0 \Leftrightarrow -2a+20=0 \Leftrightarrow a=10$.

Por tanto:

- ✓ Si $a\neq 10 \Rightarrow rango(B)=4\neq 3=rango(A)$ y el sistema es incompatible (no existe solución).
- ✓ Si $a=10 \Rightarrow rango(B)=3=rango(A)=n$, donde n es el número de incógnitas, con lo que el sistema es compatible determinado (solución única).

Resolvamos el sistema en el caso $a=10$: $\begin{cases} x-y=5 \\ y+z=10 \\ x-2z=3 \\ 2x-3z=10 \end{cases}$. Tomemos las tres primeras ecuaciones, que forman un menor distinto de cero **(*)** y apliquemos la regla de Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix}5 & -1 & 0\\ 10 & 1 & 1\\ 3 & 0 & -2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & -2\end{vmatrix}}=\frac{(-10-3+0)-(0+20+0)}{-3}=\frac{-33}{-3}=11.$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix}1 & 5 & 0\\ 0 & 10 & 1\\ 1 & 3 & -2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & -2\end{vmatrix}}=\frac{(-20+5+0)-(0+0+3)}{-3}=\frac{-18}{-3}=6.$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix}1 & -1 & 5\\ 0 & 1 & 10\\ 1 & 0 & 3\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & -2\end{vmatrix}}=\frac{(3-10+0)-(5+0+0)}{-3}=\frac{-12}{-3}=4.\ \dagger$$

6. Estudiar la posición relativa de los planos $\alpha\equiv x+y=1$, $\beta\equiv ax+z=0$ y $\gamma\equiv x+y+z=2$, según los diferentes valores del parámetro a.

septiembre 2000

Solución:

Planteemos el sistema formado por los tres planos $\begin{cases}x+y=1\\ ax+z=0\\ x+y+z=2\end{cases}$.

La matriz de los coeficientes es: $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ a & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$, cuyo rango es al menos dos pues hay un menor de orden 2 distinto de cero: $\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix}=1$.

El determinante de A es:

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & 1 & 0\\ a & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}=(0+1+0)-(0+a+1)=1-(a+1)=-a.$$

Entonces $|A|=0\Leftrightarrow -a=0\Leftrightarrow a=0$.

Por tanto:

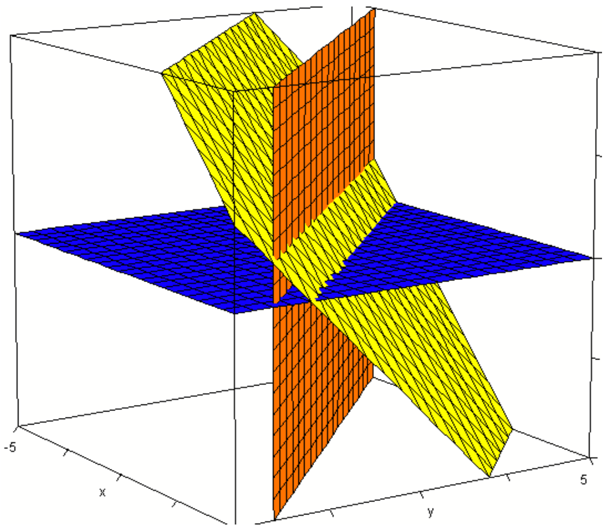
✓ Si $a \neq 0 \Rightarrow rango(A) = 3$, pues en este caso $|A| \neq 0$.

✓ Si $a = 0 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, con lo que $rango(A) = 2$ (hay al menos un menor de orden 2 distinto de cero).

La matriz ampliada es $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ a & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

✓ Si $a \neq 0 \Rightarrow rango(B) = 3 = rango(A) = n$, donde n es el número de incógnitas, con lo que el sistema es compatible determinado (solución única), y los tres planos se cortan en un punto.

✓ Si $a = 0 \Rightarrow B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ cuyo rango es 3 pues hay un menor de orden 3 distinto de cero: $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1$. En este caso $rango(B) = 3 \neq rango(A) = 2$ y el sistema es incompatible (no tiene solución). Por tanto, los tres planos no tienen ningún punto en común. Sin embargo, sí se cortan dos a dos en una recta formando entre los tres un prisma triangular (ver figura). †



7. Discute y resuelve (en los casos que sea posible) el siguiente sistema: $\begin{cases} ax+y-z=1 \\ x+2y+z=2 \\ x+3y-z=0 \end{cases}$.

junio 2001

Solución:

La matriz de los coeficientes es $A=\begin{pmatrix} a & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$, cuyo rango es al menos dos pues hay un menor de orden 2 distinto de cero: $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=1-(-2)=3$.

Calculemos el determinante de A: $|A|=\begin{vmatrix} a & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix}=(-2a+1-3)-(-2-1+3a)=-5a+1$.

Entonces se tiene que $|A|=0 \Leftrightarrow -5a+1=0 \Leftrightarrow a=\frac{1}{5}$. Por tanto:

- ✓ Si $a\neq\frac{1}{5} \Rightarrow rango(A)=3$, pues en este caso $|A|\neq 0$.
- ✓ Si $a=\frac{1}{5} \Rightarrow A=\begin{pmatrix} 1/5 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ y $rango(A)=2$ (hay al menos un menor de orden 2 distinto de 0)

La matriz ampliada es $B=\begin{pmatrix} a & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

- ✓ Si $a\neq\frac{1}{5} \Rightarrow rango(B)=3=rango(A)=n$, donde n es el número de incógnitas, con lo que el sistema es compatible determinado (solución única).
- ✓ Si $a=\frac{1}{5} \Rightarrow B=\begin{pmatrix} 1/5 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ cuyo rango es 3 pues hay un menor de orden 3 distinto de cero: $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \end{vmatrix}=(0-6-2)-(3+0-2)=-8-1=-9 \Rightarrow rango(B)=3\neq 2=rango(A)$, con lo que el sistema es incompatible (no tiene solución).

Resolvamos el sistema en el caso $a\neq\frac{1}{5}$. Recordemos que $|A|=-5a+1$ y apliquemos la regla de Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix}1&1&-1\\2&2&1\\0&3&-1\end{vmatrix}}{-5a+1}=\frac{(-2+0-6)-(0-2+3)}{-5a+1}=\frac{-8-1}{-5a+1}=\frac{-9}{-5a+1}.$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix}a&1&-1\\1&2&1\\1&0&-1\end{vmatrix}}{-5a+1}=\frac{(-2a+1+0)-(-2-1+0)}{-5a+1}=\frac{-2a+4}{-5a+1}.$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix}a&1&1\\1&2&2\\1&3&0\end{vmatrix}}{-5a+1}=\frac{(0+2+3)-(2+0+6a)}{-5a+1}=\frac{3-6a}{-5a+1}.\ \dagger$$

8. Clasifica el sistema según los valores de m y resuelve cuando $m=-1$,

$$\begin{cases}x+2y+3z=2\\2x+5y+4z=-1\\x+3y+m^2z=3m\end{cases}$$

septiembre 2001

Solución:

La matriz de los coeficientes es $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&5&4\\1&3&m^2\end{pmatrix}$, cuyo rango es al menos dos pues hay un menor de orden 2 distinto de cero: $\begin{vmatrix}1&2\\2&5\end{vmatrix}=5-4=1$.

El determinante de A es: $|A|=\begin{vmatrix}1&2&3\\2&5&4\\1&3&m^2\end{vmatrix}=(5m^2+8+18)-(15+4m^2+12)=m^2-1$. Entonces se tiene que $|A|=0\Leftrightarrow m^2-1=0\Leftrightarrow m=1$ ó $m=-1$. Por tanto:

✓ Si $m\neq 1$ y $m\neq -1\Rightarrow rango(A)=3$, pues en estos casos $|A|\neq 0$.

✓ Si $m=1$ ó $m=-1\Rightarrow A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&5&4\\1&3&1\end{pmatrix}$ y $rango(A)=2$ (hay un menor de orden 2 distinto de cero).

La matriz ampliada es $B=\begin{pmatrix}1&2&3&2\\2&5&4&-1\\1&3&m^2&3m\end{pmatrix}$.

✓ Si $m \neq 1$ y $m \neq -1 \Rightarrow rango(B) = 3 = rango(A) = n$, donde n es el número de incógnitas, con lo que el sistema es compatible determinado (solución única).

✓ Si $m = 1 \Rightarrow B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 4 & -1 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, cuyo rango es 3 pues hay un menor de orden 3 distinto de cero: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & -1 \\ 1 & 3 & 3 \end{vmatrix} = (15 - 2 + 12) - (10 + 12 - 3) = 6$. Entonces $rango(B) = 3 \neq 2 = rango(A)$ y el sistema es incompatible (no tiene solución).

✓ Si $m = -1 \Rightarrow B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 4 & -1 \\ 1 & 3 & 1 & -3 \end{pmatrix}$, cuyo rango es dos pues todos los menores de orden tres son iguales a cero (¡compruébalo!).

También se puede calcular el rango por el método de Gauss:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 4 & -1 \\ 1 & 3 & 1 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[f_3 - f_1]{f_2 - 2f_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & -2 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_3 - f_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$, luego $rango(B) = 2$.

Incluso se puede deducir que el rango es 2, observando que la tercera fila resulta de restar la segunda menos la primera.

En este caso tenemos pues que $rango(B) = 2 = rango(A) < 3 = n$, donde n es el número de incógnitas. Entonces el sistema compatible indeterminado (infinitas soluciones).

Resolvámoslo. Nos quedamos con las dos primeras ecuaciones, tomamos la incógnita z como un parámetro, $z = \lambda$, y lo pasamos al segundo miembro:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 2 \\ 2x + 5y + 4z = -1 \end{cases} \xrightarrow{z=\lambda} \begin{cases} x + 2y + 3\lambda = 2 \\ 2x + 5y + 4\lambda = -1 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x + 2y = 2 - 3\lambda \\ 2x + 5y = -1 - 4\lambda \end{cases}$$

Resolvemos ahora por la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 - 3\lambda & 2 \\ -1 - 4\lambda & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{(10 - 15\lambda) - (-2 - 8\lambda)}{1} = -7\lambda + 12 .$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 - 3\lambda \\ 2 & -1 - 4\lambda \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{(-1 - 4\lambda) - (4 - 6\lambda)}{1} = 2\lambda - 5 .$$

Resumiendo: $x = -7\lambda + 12$, $y = 2\lambda - 5$, $z = \lambda$. †

9. Discute según los valores del parámetro a el sistema $\begin{cases} ax+y+z=0 \\ x+ay+z=1 \\ x+y+az=1 \end{cases}$

   ¿Para qué valores de a se puede aplicar la regla de Cramer para resolver el sistema?

junio 2002

Solución:

La matriz de los coeficientes es $A=\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$, cuyo determinante es:

$|A|=\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix}=\left(a^3+1+1\right)-\left(a+a+a\right)=a^3-3a+2=\left(a+2\right)\left(a-1\right)^2$. Veamos los valores de a para los cuales el determinante se anula: $|A|=0\Leftrightarrow\left(a+2\right)\left(a-1\right)^2=0\Leftrightarrow a=-2$ o $a=1$.

Por tanto:

- ✓ Si $a\neq-2$ y $a\neq1\Rightarrow rango\left(A\right)=3$, pues en estos casos $|A|\neq0$.
- ✓ Si $a=-2\Rightarrow A=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ y $rango\left(A\right)=2$, pues hay un menor de orden 2 distinto de 0: $\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}=4-1=3$.
- ✓ Si $a=1\Rightarrow A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $rango\left(A\right)=1$, pues claramente todos los menores de orden dos son iguales a cero.

La matriz ampliada es $B=\begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 0 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \end{pmatrix}$.

- ✓ Si $a\neq-2$ y $a\neq1\Rightarrow rango\left(B\right)=3=rango\left(A\right)=n$, donde n es el número de incógnitas, con lo que el sistema es compatible determinado (solución única).
- ✓ Si $a=-2\Rightarrow B=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, cuyo rango es 3 pues hay un menor de orden 3 distinto de cero: $\begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=\left(4+1+0\right)-\left(0+1-2\right)=5-\left(-1\right)=6\Rightarrow rango\left(B\right)=3\neq2=rango\left(A\right)$, con lo que el sistema es incompatible (no tiene solución).

✓ Si $a=1 \Rightarrow B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, cuyo rango es 2 (hay dos filas iguales). En este caso tenemos que $rango(B)=2 \neq rango(A)=1$, y el sistema es incompatible (no tiene solución).

Los valores de a para los que se puede aplicar la regla de Cramer son los valores de a para los que el sistema es compatible $a \neq -2$ y $a \neq 1$ (en este caso determinado). Hallemos las soluciones (recordemos que el determinante de A es $(a+2)(a-1)^2$).

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix}}{|A|}=\frac{(1+1)-(a+a)}{(a+2)(a-1)^2}=\frac{-2a+2}{(a+2)(a-1)^2}=\frac{-2(a-1)}{(a+2)(a-1)^2}=\frac{-2}{(a+2)(a-1)}.$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} a & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix}}{|A|}=\frac{(a^2+1)-(1+a)}{(a+2)(a-1)^2}=\frac{a^2-a}{(a+2)(a-1)^2}=\frac{a(a-1)}{(a+2)(a-1)^2}=\frac{a}{(a+2)(a-1)}.$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{|A|}=\frac{(a^2+1)-(1+a)}{(a+2)(a-1)^2}=\frac{a^2-a}{(a+2)(a-1)^2}=\frac{a(a-1)}{(a+2)(a-1)^2}=\frac{a}{(a+2)(a-1)}.$$ †

---

10. Hallar el valor del parámetro k para que el sistema $\begin{cases} x+y+z=2 \\ 2x+3y+z=5 \\ 4x+5y+3z=k \end{cases}$ sea compatible indeterminado.

Calcula la solución general y verifica si las ternas $(1,1,0)$, $(-5,4,3)$ y $(1,2,-1)$ son soluciones particulares.

septiembre 2002

Solución:

La matriz de los coeficientes, $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}$, no puede tener rango 3 pues la tercera fila es combinación de las dos primeras (la tercera fila es la primera multiplicada por 2 más la segunda). Así pues, su rango será dos (es obvio que hay al menos un menor de orden 2 distinto de cero).

Por tanto, el sistema será compatible indeterminado cuando el rango de la matriz ampliada también sea 2: $rango(A)=rango(B)=2<3=n$, donde n es el número de incógnitas.

Hallemos pues el valor de k para que el rango de la matriz ampliada sea dos. Lo haremos por el método de Gauss:

$$B=\begin{pmatrix}1&1&1&2\\2&3&1&5\\4&5&3&k\end{pmatrix}\xrightarrow[f_3-4f_1]{f_2-2f_1}\begin{pmatrix}1&1&1&2\\0&1&-1&1\\0&1&-1&k-8\end{pmatrix}\xrightarrow{f_3-f_2}\begin{pmatrix}1&1&1&2\\0&1&-1&1\\0&0&0&k-9\end{pmatrix}$$

De aquí se deduce que:

✓ Si $k=9 \Rightarrow rango(B)=2$.

✓ Si $k\neq 9 \Rightarrow rango(B)=3$.

Por tanto, el valor del parámetro para el cual el sistema es compatible indeterminado es $k=9$.

Hallemos la solución general. Eliminamos la tercera ecuación, llamamos $z=\lambda$ y pasamos el parámetro al segundo miembro: $\begin{cases}x+y+\lambda=2\\2x+3y+\lambda=5\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x+y=2-\lambda\\2x+3y=5-\lambda\end{cases}$. Aplicamos a hora la regla de Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix}2-\lambda&1\\5-\lambda&3\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1&1\\2&3\end{vmatrix}}=\frac{6-3\lambda-(5-\lambda)}{1}=-2\lambda+1\ ;\ y=\frac{\begin{vmatrix}1&2-\lambda\\2&5-\lambda\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1&1\\2&3\end{vmatrix}}=\frac{5-\lambda-(4-2\lambda)}{1}=\lambda+1.$$

Resumiendo: $x=-2\lambda+1$, $y=\lambda+1$, $z=\lambda$.†

---

11. Estudia, según los valores de a, la compatibilidad del sistema: $\begin{cases}ax+y+z=1\\x+ay+z=1\\x+y+az=-2\end{cases}$. Resuélvelo para el valor de a que lo haga compatible indeterminado.

septiembre 2003

Solución:

Este ejercicio es muy parecido al ejercicio 9.

La matriz de los coeficientes es $A=\begin{pmatrix}a&1&1\\1&a&1\\1&1&a\end{pmatrix}$, cuyo determinante es:

$$|A|=\begin{vmatrix}a&1&1\\1&a&1\\1&1&a\end{vmatrix}=\left(a^3+1+1\right)-(a+a+a)=a^3-3a+2=(a+2)(a-1)^2.$$

Entonces, $|A|=0\Leftrightarrow(a+2)(a-1)^2=0\Leftrightarrow a=-2$ ó $a=1$. Por tanto:

✓ Si $a\neq-2$ y $a\neq1\Rightarrow rango(A)=3$, pues en estos casos $|A|\neq0$.

✓ Si $a=-2\Rightarrow A=\begin{pmatrix}-2&1&1\\1&-2&1\\1&1&-2\end{pmatrix}$ y $rango(A)=2$, pues hay un menor de orden 2 distinto de 0:

$$\begin{vmatrix}-2&1\\1&-2\end{vmatrix}=4-1=3.$$

✓ Si $a=1 \Rightarrow A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$, con lo que $rango(A)=1$ pues claramente todos los menores de orden dos son iguales a cero.

La matriz ampliada es $B=\begin{pmatrix}a & 1 & 1 & 1\\ 1 & a & 1 & 1\\ 1 & 1 & a & -2\end{pmatrix}$.

✓ Si $a\neq -2$ y $a\neq 1 \Rightarrow rango(B)=3=rango(A)=n$, donde n es el número de incógnitas, con lo que el sistema es compatible determinado (solución única).

✓ Si $a=-2 \Rightarrow B=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 1 & 1\\ 1 & -2 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -2 & -2\end{pmatrix}$ cuyo rango es 2 pues todos los menores de orden 3 son iguales a cero (compruébese). Entonces $rango(B)=2=rango(A)<3=n$, con lo que el sistema compatible indeterminado (infinitas soluciones).

✓ Si $a=1 \Rightarrow B=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & -2\end{pmatrix}$ cuyo rango es 2 (hay dos filas iguales, con lo que el rango no puede ser 3 y hay un menor de orden 2 distinto de cero). Entonces $rango(B)=2\neq rango(A)=1$, con lo que el sistema es incompatible (no tiene solución).

El valor de a para el que el sistema es compatible indeterminado es $a=-2$. Para resolverlo en este caso eliminamos la última fila, llamamos $z=\lambda$, pasamos este parámetro al segundo miembro y aplicamos la regla de Cramer: $\begin{cases}-2x+y+\lambda=1\\ x-2y+\lambda=1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}-2x+y=1-\lambda\\ x-2y=1-\lambda\end{cases}$.

$$x=\frac{\begin{vmatrix}1-\lambda & 1\\ 1-\lambda & -2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}-2 & 1\\ 1 & -2\end{vmatrix}}=\frac{-2+2\lambda-(1-\lambda)}{3}=\frac{3\lambda-3}{3}=\lambda-1\ ;\ y=\frac{\begin{vmatrix}-2 & 1-\lambda\\ 1 & 1-\lambda\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}-2 & 1\\ 1 & -2\end{vmatrix}}=\frac{-2+2\lambda-(1-\lambda)}{3}=\frac{3\lambda-3}{3}=\lambda-1.$$

Resumiendo: $x=\lambda-1$, $y=\lambda-1$, $z=\lambda$.†

---

12. Se considera el sistema de ecuaciones: $\begin{cases}(m+2)x+(m-1)y-z=3\\ mx-y+z=2\\ x+my-z=0\end{cases}$

a) Discútelo para los distintos valores de m.

b) Resuélvelo para $m=1$.

junio 2004

Solución:

La matriz de los coeficientes es $A=\begin{pmatrix} m+2 & m-1 & -1 \\ m & -1 & 1 \\ 1 & m & -1 \end{pmatrix}$. El determinante de A es

$$|A|=\begin{vmatrix} m+2 & m-1 & -1 \\ m & -1 & 1 \\ 1 & m & -1 \end{vmatrix}=\left(m+2+m-1-m^2\right)-\left(1-m^2+m+m^2+2m\right)=-m^2-m=-m\left(m+1\right).$$

Entonces $|A|=0 \Leftrightarrow m=0$ ó $m=-1$.

✓ Si $m\neq 0$ y $m\neq -1 \Rightarrow rango\left(A\right)=3$, pues en estos casos $|A|\neq 0$.

✓ Si $m=0$, $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow rango\left(A\right)=2$ (hay al menos un menor de orden 2 distinto de 0).

✓ Si $m=-1$, $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow rango\left(A\right)=2$ (hay al menos un menor de orden 2 distinto de 0).

La matriz ampliada es $B=\begin{pmatrix} m+2 & m-1 & -1 & 3 \\ m & -1 & 1 & 2 \\ 1 & m & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

✓ Si $m\neq 0$ y $m\neq -1 \Rightarrow rango\left(B\right)=3=rango\left(A\right)=n$, donde n es el número de incógnitas, con lo que el sistema es compatible determinado (solución única).

✓ Si $m=0$, $B=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, cuyo rango es 3 pues hay un menor de orden 3 distinto de cero:

$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}=-2-\left(-3\right)=1$. Entonces $rango\left(B\right)=3\neq 2=rango\left(A\right)$, con lo que el sistema es incompatible.

✓ Si $m=-1$, $B=\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 3 \\ -1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, cuyo rango es 3 pues hay un menor de orden 3 distinto de cero:

$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = -2-(-6) = 4$ (para calcular este determinante se le ha sumado a la segunda columna la primera y luego se ha desarrollado por los elementos de la tercera fila). Entonces $rango(B) = 3 \neq 2 = rango(A)$, con lo que el sistema es incompatible.

Para $m=1$, el sistema es $\begin{cases} 3x - z = 3 \\ x - y + z = 2 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$, $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $|A| = -2$. Entonces, por la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{(3-2)-3}{-2} = 1.$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{(-6+3)-(-2-3)}{-2} = \frac{-3+5}{-2} = -1.$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{3-(-3+6)}{-2} = \frac{0}{-2} = 0. \dagger$$

---

13. Dado el sistema de ecuaciones dependiente del parámetro a: $\begin{cases} x + 2y + z = a \\ x + y - az = a \\ 2x + 3y + z = a \end{cases}$, se pide:

a) Discusión del mismo en función del valor del parámetro a.

b) Resolución en el caso de que $a \neq 0$.

junio 2005

Solución:

---

14. a) Discute, en función de los valores de m, el siguiente sistema: $\begin{cases} 2x - 3y = 0 \\ x - y + z = 0 \\ x + 2y + mz = m \end{cases}$

b) Resuelve, en los casos de compatibilidad, el sistema anterior.

septiembre 2005

Solución:

15. A un compañero le piden que clasifique y resuelva el sistema $\begin{cases} 3x-ky=3 \\ y+3z=6 \\ x+kz=5 \end{cases}$ para el valor del parámetro $k\in\mathbb{R}$ que él desee. Obtiene, correctamente para dicho valor, que el sistema es compatible indeterminado, y que una expresión de las soluciones en forma paramétrica es $x=1+2t$, $y=\ldots$, $z=\ldots$ Determina para qué valor del parámetro k ha clasificado y resuelto el sistema, y calcula las expresiones de las incógnitas y y z que le faltan.

junio 2006

Solución:

16. Clasifica en función del parámetro $a\in\mathbb{R}$ el sistema de ecuaciones: $\begin{cases} ax-3y-2z=0 \\ -x+(5+a)z=0 \\ 2x+3y+4z=0 \end{cases}$ y resuélvelo, si es posible, para $a=-4$.

septiembre 2006

Solución:

17. Discute y resuelve, en función del parámetro $a\in\mathbb{R}$, el sistema $\begin{cases} ax+y=0 \\ -y+2az=0 \\ -x+ay=0 \end{cases}$

junio 2007

Solución:

18. Enuncia el Teorema de Rouché-Fröbenius. Contesta razonadamente a las siguientes preguntas para un sistema $A\cdot X=B$ en forma matricial:
a) ¿Puede un sistema homogéneo ser incompatible?
b) Si la matriz A es de orden 2×3, ¿puede ser el sistema $A\cdot X=B$ compatible determinado?

septiembre 2007

Solución:

19. Encuentra, si es posible, un valor del parámetro $a\in\mathbb{R}$ de modo que el sistema $\begin{cases} x+y-z=1 \\ x-y+2z=2 \\ 2x+z=a \end{cases}$

a) Sea compatible determinado.
b) Sea compatible indeterminado.
c) Sea incompatible.

junio 2008

Solución:

La matriz de los coeficientes es $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, cuyo determinante es

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1+4+0)-(2+1+0) = 3-3 = 0 .$$

Por tanto $rango(A) = 2$ (hay al menos un menor de orden 2 distinto de cero). Esto quiere decir que el sistema no puede ser compatible determinado (infinitas soluciones).

La matriz ampliada es $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & a \end{pmatrix}$. Hallemos su rango utilizando el método de Gauss:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & a \end{pmatrix} \xrightarrow[f_3-2f_1]{f_2-f_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 3 & a-2 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_3-f_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a-3 \end{pmatrix}$$

Por tanto: $rango(B) = \begin{cases} 2 & \text{si } a = 3 \\ 3 & \text{si } a \neq 3 \end{cases}$

Resumiendo:

- ✓ Si $a = 3 \Rightarrow rango(B) = 2 = rango(A) < 3 = n$, donde n es el número de incógnitas, con lo que el sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones).
- ✓ Si $a \neq 3 \Rightarrow rango(B) = 3 \neq rango(A) = 2$, con lo que el sistema es incompatible.
- ✓ El sistema nunca puede ser compatible determinado, sea quien sea $a \in \mathbb{R}$.†

---

20. Clasifica el sistema $\begin{cases} x-2y+az=0 \\ -ay+2z=0 \\ 2x-y+(a+1)z=0 \\ x+y+z=0 \end{cases}$ en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$, y resuélvelo para $a = -2$.

septiembre 2008

Solución:

Por ser todos los términos independientes iguales a cero, se trata de un sistema homogéneo. Esto quiere decir que $x=0$, $y=0$, $z=0$ siempre es una solución del sistema, sea quien sea $a \in \mathbb{R}$. Además, en estos casos el rango de la matriz de los coeficientes es igual al rango de la matriz ampliada (al añadir una columna de ceros el rango de la matriz ampliada no varía respecto del de la matriz de los coeficientes).

La matriz de los coeficientes es $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & a\\ 0 & -a & 2\\ 2 & -1 & a+1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$. El rango de esta matriz es al menos 2 porque hay al menos un menor de orden 2 distinto de cero: $\begin{vmatrix}2 & -1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=2-(-1)=3\neq 0$. Calculemos los menores de orden 3 y veamos para qué valores de a se anulan:

$$\begin{vmatrix}1 & -2 & a\\ 0 & -a & 2\\ 2 & -1 & a+1\end{vmatrix}=\left(-a^2-a-8\right)-\left(-2a^2-2\right)=a^2-a-6=0\Leftrightarrow\begin{cases}a=-2\\ a=3\end{cases}.$$

$$\begin{vmatrix}1 & -2 & a\\ 0 & -a & 2\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}=\left(-a-4\right)-\left(-a^2+2\right)=a^2-a-6=0\Leftrightarrow\begin{cases}a=-2\\ a=3\end{cases}.$$

$$\begin{vmatrix}1 & -2 & a\\ 2 & -1 & a+1\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}=\left(-1-2a-2+2a\right)-\left(-a-4+a+1\right)=-3-(-3)=0$$

$$\begin{vmatrix}0 & -a & 2\\ 2 & -1 & a+1\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}=\left(-a^2-a+4\right)-\left(-2-2a\right)=-a^2+a+6=0\Leftrightarrow\begin{cases}a=-2\\ a=3\end{cases}.$$

Podemos concluir entonces que:

- ✓ Si $a=-2$ ó $a=3$, todos los menores de orden 3 son iguales a de cero y entonces $rango(A)=2<3=n$, donde n es el número de incógnitas. Por tanto, en estos casos el sistema será compatible indeterminado (infinitas soluciones).
- ✓ Si $a\neq -2$ y $a\neq 3$, habrá menores de orden 3 distintos de cero, con lo que $rango(A)=3=n$, donde n es el número de incógnitas. Por tanto, en estos casos el sistema será compatible determinado (solución única).

Estas conclusiones también las podríamos haber deducido si solamente hubiéramos estudiado los dos últimos menores anteriores (que son los únicos que contienen al menor $\begin{vmatrix}2 & -1\\ 1 & 1\end{vmatrix}$, que ya habíamos visto que es distinto de cero: es el llamado *método de orlar* por menores distintos de cero).

Resolvamos el sistema para $a=-2$, valor para el que sabemos que el sistema es compatible indeterminado.

En este caso el sistema queda del siguiente modo: $\begin{cases}x-2y-2z=0\\ 2y+2z=0\\ 2x-y-z=0\\ x+y+z=0\end{cases}$.

Como $rango(A)=2$ podemos eliminar dos ecuaciones (por ejemplo, la primera y la segunda) y pasar una de las incógnitas al segundo miembro en forma de parámetro (por ejemplo, $z=\lambda$), con lo que el sistema queda de la siguiente forma: $\begin{cases} 2x - y = \lambda \\ x + y = -\lambda \end{cases}$. Sumando ambas ecuaciones tenemos $3x = 0 \Rightarrow x = 0$. Y, sustituyendo en la segunda ecuación tenemos $y = -\lambda$ (también se pueden obtener aplicando la regla de Cramer).

Resumiendo, las soluciones para $a = -2$ son $(x, y, z) = (0, -\lambda, \lambda)$.

Observación importante: la razón por la que hemos suprimido la primera y segunda ecuaciones, y por la que hemos tomado como parámetro λ la incógnita z para pasarla al segundo miembro, es que de este modo la matriz de los coeficientes que nos queda en el sistema resultante es $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, cuyo determinante ya sabíamos que era distinto de cero (lo habíamos elegido al principio para decidir que el rango de la matriz de los coeficientes era al menos 2), con lo que el sistema correspondiente nos proporcionará soluciones con toda seguridad. Esto se suele hacer con frecuencia para extraer las soluciones de un sistema, ya sea compatible determinado o indeterminado.