UCLM – EvAU – Matemáticas II

Integral indefinida

1. Examen 2 (Junio 2012 – Propuesta B)

2B. Calcula las siguientes integrales:

$$\text{a) } \int \frac{1}{4+9x^2}\,dx \quad ; \quad \text{b) } \int \left(\operatorname{tg} x + \frac{1}{\operatorname{tg} x}\right) dx$$

Solución.

$$\text{a) } \int \frac{1}{4+9x^2}\,dx = \int \frac{\frac{1}{4}}{1+\frac{9x^2}{4}}\,dx = \frac{1}{4}\int \frac{1}{1+\left(\frac{3x}{2}\right)^2}\,dx = \frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}\int \frac{\frac{3}{2}}{1+\left(\frac{3x}{2}\right)^2}\,dx = \frac{1}{6}\int \frac{\frac{3}{2}}{1+\left(\frac{3x}{2}\right)^2}\,dx = \frac{1}{6}\operatorname{arctg}\left(\frac{3x}{2}\right)+C\,.$$

$$\text{b) } \int \left(\operatorname{tg} x + \frac{1}{\operatorname{tg} x}\right) dx = \int \left(\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}\right) dx = \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\,dx + \int \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}\,dx = -\int \frac{-\operatorname{sen} x}{\cos x}\,dx + \int \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}\,dx =$$

$$= -\ln(\cos x) + \ln(\operatorname{sen} x) + C\,.$$

2. Examen 3 (Septiembre 2012 – Propuesta A)

2A. Calcula las siguientes integrales:

$$\text{a) } \int \operatorname{sen}^2 x \cos x\,dx \quad ; \quad \text{b) } \int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$$

Solución.

a) $\int \operatorname{sen}^2 x \cos x\,dx = \frac{\operatorname{sen}^3 x}{3} + C$. Esta integral es inmediata: se ha usado que $\int f'(x)\cdot f(x)^n\,dx = \frac{f(x)^{n+1}}{n+1}+C$.

b) $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx = \left[\begin{array}{c} \sqrt{x} = t \Rightarrow x = t^2 \\ \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx = dt \Rightarrow dx = 2\sqrt{x}\,dt = 2t\,dt \end{array}\right] = \int \frac{e^t}{t}\,2t\,dt = 2\int e^t\,dt = 2e^t + C = 2e^{\sqrt{x}} + C$. Se ha realizado un cambio de variable, aunque usando que $\int f'(x)e^{f(x)}dx = e^{f(x)}+C$, se puede hacer de manera inmediata:

$$\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{x}}\cdot e^{\sqrt{x}}\,dx = 2\int \frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot e^{\sqrt{x}}\,dx = 2e^{\sqrt{x}} + C\,.$$

3. Examen 5 (Reserva 1 2012 – Propuesta A)

2A. Calcula la integral $\int \frac{x+2}{x^3+x^2}\,dx$.

Solución.

Se trata de una integral racional. Como $x^3+x^2=x^2(x+1)$, las raíces de x^3+x^2 son $x=0$ (doble) y $x=-1$ (simple). Entonces:

$$\frac{x+2}{x^3+x^2}=\frac{x+2}{x^2(x+1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x+1}=\frac{Ax(x+1)+B(x+1)+Cx^2}{x^2(x+1)}\Rightarrow x+2=Ax(x+1)+B(x+1)+Cx^2 .$$

Si $x=0\Rightarrow 2=B$. Si $x=-1\Rightarrow 1=C$. Si $x=1\Rightarrow 3=2A+4+1\Rightarrow 2A=-2\Rightarrow A=-1$. Por tanto:

$$\int\frac{x+2}{x^3+x^2}dx=\int\frac{-1}{x}dx+\int\frac{2}{x^2}dx+\int\frac{1}{x+1}dx=-\ln x-\frac{2}{x}+\ln(x+1)+C .$$

4. Examen 7 (Reserva 2 2012 – Propuesta A)

2A. Encuentra una primitiva $F(x)$ de la función $f(x)=(x^2+1)e^x$ tal que $F(0)=5$.

Solución.

$$\int(x^2+1)e^xdx=\begin{bmatrix}u=x^2+1 & du=2x\,dx\\ dv=e^xdx & v=e^x\end{bmatrix}=(x^2+1)e^x-\int 2xe^xdx=\begin{bmatrix}u=2x & du=2dx\\ dv=e^xdx & v=e^x\end{bmatrix}=$$

$$=(x^2+1)e^x-\left(2xe^x-\int 2e^xdx\right)=(x^2+1)e^x-2xe^x+2e^x+C=(x^2+1-2x+2)e^x+C=(x^2-2x+3)+C .$$

Entonces una primitiva $F(x)$ de la función $f(x)=(x^2+1)e^x$ es $F(x)=(x^2-2x+3)e^x+C$. Como $F(0)=5$, tenemos sustituyendo que $3+C=5\Rightarrow C=2$. Luego, $F(x)=(x^2-2x+3)e^x+2$.

5. Examen 10 (Junio 2013 – Propuesta B)

2B. Calcula las siguientes integrales:

a) $\displaystyle\int\frac{2\operatorname{sen}x\cos x}{1+\operatorname{sen}^2x}dx$; b) $\displaystyle\int\frac{x^2+x-4}{x^3-4x}dx$

Solución.

a) $\displaystyle\int\frac{2\operatorname{sen}x\cos x}{1+\operatorname{sen}^2x}dx=\ln(1+\operatorname{sen}^2x)+C$. Es inmediata pues $\displaystyle\int\frac{f'(x)}{f(x)}dx=\ln f(x)+C$.

b) $\displaystyle\int\frac{x^2+x-4}{x^3-4x}dx=\int\frac{x^2+x-4}{x(x+2)(x-2)}dx=(*)$

$$\frac{x^2+x-4}{x(x+2)(x-2)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+2}+\frac{C}{x-2}=\frac{A(x+2)(x-2)+Bx(x-2)+Cx(x+2)}{x(x+2)(x-2)}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2+x-4=A(x+2)(x-2)+Bx(x-2)+Cx(x+2) .$$

Si $x=0\Rightarrow -4=-4A\Rightarrow A=1$. Si $x=-2\Rightarrow -2=-8B\Rightarrow B=-\frac{1}{4}$. Si $x=2\Rightarrow 2=8C\Rightarrow C=\frac{1}{4}$.

Entonces:

$$(*)=\int\frac{1}{x}dx+\int\frac{-1/4}{x+2}dx+\int\frac{-1/4}{x-2}dx=\ln x-\frac{1}{4}\ln(x+2)+\frac{1}{4}\ln(x-2)+C .$$

6. Examen 11 (Septiembre 2013 – Propuesta A)

2A. Calcula las siguientes integrales:

$$\text{a) } \int \frac{1+x+\sqrt{x}}{x^2}\,dx \quad ; \quad \text{b) } \int \frac{e^x}{e^{2x}-3e^x+2}\,dx$$

Solución.

a) $$\int \frac{1+x+\sqrt{x}}{x^2}\,dx = \int \frac{1}{x^2}\,dx + \int \frac{1}{x}\,dx + \int \frac{\sqrt{x}}{x^2}\,dx = \int \frac{1}{x^2}\,dx + \int \frac{1}{x}\,dx + \int x^{-3/2}x = -\frac{1}{x} + \ln x + \frac{x^{-1/2}}{-1/2} + C =$$

$$= -\frac{1}{x} + \ln x - \frac{2}{x^{-1/2}} + C = -\frac{1}{x} + \ln x - \frac{2}{\sqrt{x}} + C.$$

b) $$\int \frac{e^x}{e^{2x}-3e^x+2}\,dx = \left[\begin{array}{c} e^x = t \Rightarrow e^{2x} = \left(e^x\right)^2 = t^2 \\ e^x dx = dt \end{array}\right] = \int \frac{e^x dx}{e^{2x}-3e^x+2} = \int \frac{dt}{t^2-3t+2} =$$

$$= \int \frac{1}{t^2-3t+2}\,dt = \int \frac{1}{(t-1)(t-2)}\,dt = (*)$$

$$\frac{1}{(t-1)(t-2)} = \frac{A}{t-1} + \frac{B}{t-2} = \frac{A(t-2)+B(t-1)}{(t-1)(t-2)} \Rightarrow 1 = A(t-2)+B(t-1).$$

Si $t=2 \Rightarrow 1=B$. Si $t=1 \Rightarrow 1=-A \Rightarrow A=-1$. Por tanto:

$$(*) = \int \frac{-1}{t-1}\,dt + \int \frac{1}{t-2}\,dt = -\ln(t-1) + \ln(t-2) + C = \ln\left(e^x-2\right) - \ln\left(e^x-1\right) + C = \ln \frac{e^x-2}{e^x-1} + C.$$

7. Examen 14 (Reserva 1 2013 – Propuesta B)

2B. Calcula las siguientes integrales:

$$\text{a) } \int \frac{2\cos x}{1+\operatorname{sen}^2 x}\,dx \quad ; \quad \text{b) } \int \left(x^2+2x\right)\ln x\,dx$$

Solución.

a) $\displaystyle\int \frac{2\cos x}{1+\operatorname{sen}^2 x}\,dx = 2\int \frac{\cos x}{1+\operatorname{sen}^2 x}\,dx = 2\operatorname{arctg}(\operatorname{sen} x) + C$. Esta integral es inmediata teniendo en cuenta que

$$\int \frac{f'(x)}{1+f(x)^2}\,dx = \operatorname{arctg} f(x) + C.$$

b) $$\int \left(x^2+2x\right)\ln x\,dx = \left[\begin{array}{cc} u = \ln x & du = \frac{1}{x}dx \\ dv = \left(x^2+2x\right)dx & v = \frac{x^3}{3}+x^2 \end{array}\right] = \left(\frac{x^3}{3}+x^2\right)\ln x - \int \left(\frac{x^3}{3}+x^2\right)\frac{1}{x}\,dx =$$

$$= \left(\frac{x^3}{3}+x^2\right)\ln x - \int \left(\frac{x^2}{3}+x\right)dx = \left(\frac{x^3}{3}+x^2\right)\ln x - \frac{1}{3}\int x^2 dx - \int x dx = \left(\frac{x^3}{3}+x^2\right)\ln x - \frac{1}{3}\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + C =$$

$$= \left(\frac{x^3}{3}+x^2\right)\ln x - \frac{x^3}{9} - \frac{x^2}{2} + C.$$

8. Examen 15 (Reserva 2 2013 – Propuesta A)

2A. Calcula las siguientes integrales:

$$\text{a) } \int\left(\frac{2\ln x}{x}+\ln x\right)dx \quad ; \quad \text{b) } \int 3\sqrt{2x+1}\,dx$$

Solución.

a) $$\int\left(\frac{2\ln x}{x}+\ln x\right)dx=2\int\frac{1}{x}\ln x\,dx+\int\ln x\,dx=2\frac{\ln^2 x}{2}+\int\ln x\,dx=\begin{bmatrix} u=\ln x & du=\frac{1}{x}dx \\ dv=dx & v=x \end{bmatrix}=$$

$$=\ln^2 x+x\ln x-\int x\frac{1}{x}dx=\ln^2 x+x\ln x-x+C\,.$$

b) $$\int 3\sqrt{2x+1}\,dx=\begin{bmatrix} \sqrt{2x+1}=t\Rightarrow 2x+1=t^2 \\ 2dx=2tdt\Rightarrow dx=tdt \end{bmatrix}=\int 3\sqrt{t^2}\,tdt=\int 3t^2dt=t^3+C=\sqrt{(2x+1)^3}+C\,.$$

9. Examen 17 (Junio 2014 – Propuesta A)

2A. Calcula la integral definida $\int_0^1\left(x^2+x+1\right)e^{-x}dx$.

Solución.

En primer lugar calcularemos la correspondiente integral indefinida.

$$\int\left(x^2+x+1\right)e^{-x}dx=\begin{bmatrix} u=x^2+x+1 & du=(2x+1)\,dx \\ dv=e^{-x}dx & v=-e^{-x} \end{bmatrix}=-\left(x^2+x+1\right)e^{-x}-\int\left(-e^{-x}\right)(2x+1)\,dx=$$

$$=-\left(x^2+x+1\right)e^{-x}+\int(2x+1)e^{-x}dx=\begin{bmatrix} u=2x+1 & du=2dx \\ dv=e^{-x}dx & v=-e^{-x} \end{bmatrix}=-\left(x^2+x+1\right)e^{-x}-(2x+1)e^{-x}-\int\left(-e^{-x}\right)2dx=$$

$$=\left(-x^2-x-1-2x-1\right)e^{-x}+\int 2e^{-x}\,dx=\left(-x^2-3x-2\right)e^{-x}-2e^{-x}+C=\left(-x^2-3x-4\right)e^{-x}+C\,.$$

Entonces, usando la regla de Barrow:

$$\int_0^1\left(x^2+x+1\right)e^{-x}dx=\left[\left(-x^2-3x-4\right)e^{-x}\right]_0^1=(-1-3-4)e^{-1}-\left(-4e^0\right)=-8e^{-1}+4\,.$$

10. Examen 20 (Septiembre 2014 – Propuesta B)

2B. Calcula las siguientes integrales:

$$\text{a) } \int\frac{e^x}{e^x-e^{-x}}dx \quad ; \quad \text{b) } \int\frac{2}{4+x^2}dx$$

Solución.

a) $$\int\frac{e^x}{e^x-e^{-x}}dx=\int\frac{e^xdx}{e^x-e^{-x}}=\begin{bmatrix} e^x=t\Rightarrow e^{-x}=\left(e^x\right)^{-1}=t^{-1} \\ e^xdx=dt \end{bmatrix}=\int\frac{dt}{t-t^{-1}}=\int\frac{1}{t-\frac{1}{t}}dt=\int\frac{1}{\frac{t^2-1}{t}}dt=\int\frac{t}{t^2-1}dt=$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{2t}{t^2-1}dt=\frac{1}{2}\ln\left(t^2-1\right)+C=\frac{1}{2}\ln\left(e^{2x}-1\right)+C\,.$$

b) $\displaystyle\int \frac{2}{4+x^2}dx = \int \frac{\frac{2}{4}}{1+\frac{x^2}{4}}dx = \int \frac{\frac{1}{2}}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2}dx = \operatorname{arctg}\frac{x}{2}+C$. Hemos usado que $\displaystyle\int \frac{f'(x)}{1+f(x)^2}dx = \operatorname{arctg} f(x)+C$.

11. Examen 22 (Junio 2015 – Propuesta B)

2B. Dada la función $f(x)=(x+1)e^{2x}$, encuentra una primitiva de la función $f(x)$ que pase por el origen de coordenadas.

Solución.

$$\int (x+1)e^{2x}dx = \left[\begin{array}{ll} u=x+1 & du=dx \\ dv=e^{2x}dx & v=\frac{1}{2}e^{2x}\end{array}\right] = \frac{1}{2}(x+1)e^{2x} - \int \frac{1}{2}e^{2x}dx = \frac{1}{2}(x+1)e^{2x} - \frac{1}{2}\int e^{2x}dx =$$

$=\frac{1}{2}(x+1)e^{2x} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\int 2e^{2x}dx = \frac{1}{2}(x+1)e^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x}+C = \left(\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\right)e^{2x}+C$. Entonces, una primitiva $F(x)$ de la función $f(x)$ es $F(x)=\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\right)e^{2x}+C$. Como esta primitiva ha de pasar por el origen de coordenadas, tenemos que $F(0)=0$, es decir, $\frac{1}{4}+C=0 \Rightarrow C=-\frac{1}{4}$. Por tanto, la primitiva que se pide es $F(x)=\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\right)e^{2x}-\frac{1}{4}$.

12. Examen 24 (Septiembre 2015 – Propuesta B)

2B. Calcula las integrales

$$\text{a) } \int \frac{1}{\sqrt{x}}\left(4x^3-\sqrt[4]{x}\right)dx \quad ; \quad \text{b) } \int x\ln x\,dx$$

Solución.

a) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x}}\left(4x^3-\sqrt[4]{x}\right)dx = \int \frac{4x^3}{x^{1/2}}dx - \int \frac{x^{1/4}}{x^{1/2}}dx = 4\int x^{5/2}dx - \int x^{-1/4}dx = 4\frac{x^{7/2}}{7/2} - \frac{x^{3/4}}{3/4}+C = \frac{8}{7}\sqrt{x^7} - \frac{4}{3}\sqrt[4]{x^3}+C$.

b) $\displaystyle\int x\ln x\,dx = \left[\begin{array}{ll} u=\ln x & du=\frac{1}{x}dx \\ dv=xdx & v=\frac{x^2}{2}\end{array}\right] = \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x^2}{2}\frac{1}{x}dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{2}\int x\,dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4}+C$.

13. Examen 25 (Junio 2016 – Propuesta A)

2A. Calcula la integral definida $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi^2}{4}} \frac{\cos\sqrt{x}}{2}dx$.

Solución.

En primer lugar haremos el cálculo de la integral indefinida usando un cambio de variable y, luego, aplicando el método de integración por partes.

$$\int \frac{\cos\sqrt{x}}{2}dx = \left[\begin{array}{c} t=\sqrt{x} \Rightarrow dt = \frac{1}{2\sqrt{x}}dx \Rightarrow \\ \Rightarrow dt = \frac{1}{2t}dx \Rightarrow dx = 2tdt \end{array}\right] = \int \frac{\cos t}{2} 2t\,dt = \int t\cos t\,dt = \left[\begin{array}{cc} u=t & du=dt \\ dv=\cos t\,dt & v=\operatorname{sen} t \end{array}\right] =$$

$$t\operatorname{sen} t - \int \operatorname{sen} t\,dt = t\operatorname{sen} t + \cos t + C = \sqrt{x}\operatorname{sen}\sqrt{x} + \cos\sqrt{x} + C\,.$$

La integral definida la hallaremos aplicando la regla de Barrow.

$$\int_0^{\frac{\pi^2}{4}} \frac{\cos\sqrt{x}}{2}dx = \left[\sqrt{x}\operatorname{sen}\sqrt{x} + \cos\sqrt{x}\right]_0^{\frac{\pi^2}{4}} = \left(\sqrt{\frac{\pi^2}{4}}\operatorname{sen}\sqrt{\frac{\pi^2}{4}} + \cos\sqrt{\frac{\pi^2}{4}}\right) - (\cos 0) = \frac{\pi}{2}\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} + \cos\frac{\pi}{2} - 1 = \frac{\pi}{2} - 1\,.$$

14. Examen 27 (Septiembre 2016 – Propuesta A)

2A. Dada la función $g(x)=(x+b)\cos x$, $b\in\mathbb{R}$, calcula la primitiva $G(x)$ de $g(x)$ que verifica que $G(0)=1$.

Solución.

$$\int (x+b)\cos x\,dx = \left[\begin{array}{cc} u=x+b & du=dx \\ dv=\cos x\,dx & v=\operatorname{sen} x \end{array}\right] = (x+b)\operatorname{sen} x - \int \operatorname{sen} x\,dx = (x+b)\operatorname{sen} x + \cos x + C\,.$$ Entonces una primitiva $G(x)$ de $g(x)=(x+b)\cos x$ es $G(x)=(x+b)\operatorname{sen} x+\cos x+C$. Como $G(0)=1$, se tiene que $(0+b)\operatorname{sen} 0+\cos 0+C=1 \Rightarrow 1+C=1 \Rightarrow C=0$. Así, la primitiva que se pide es $G(x)=(x+b)\operatorname{sen} x+\cos x$.

15. Examen 32 (Septiembre 2017 – Propuesta B)

2B. Calcula razonadamente las siguientes integrales:

$$\text{a) } \int \frac{x^3+2x^2+x-10}{x^2+x-2}dx \quad ; \quad \text{b) } \int x^2 \ln x\,dx$$

Solución.

a) $\displaystyle\int \frac{x^3+2x^2+x-10}{x^2+x-2}dx$. Se trata de una integral racional, donde el grado del numerador es mayor que el grado del denominador. Efectuando la división, se obtiene como cociente $x+1$ y de resto $2x-8$, con lo que podemos escribir: $x^3+2x^2+x-10=(x^2+x-2)(x+1)+2x-8 \Rightarrow \dfrac{x^3+2x^2+x-10}{x^2+x-2} = x+1+\dfrac{2x-8}{x^2+x-2}$. Entonces:

$$\int \frac{x^3+2x^2+x-10}{x^2+x-2}dx = \int (x+1)dx + \int \frac{2x-8}{x^2+x-2}dx = \frac{x^2}{2}+x+\int \frac{2x-8}{x^2+x-2}dx = (*)$$

Resulta, por otro lado, que $x^2+x-2=(x-1)(x+2)$. Descomponiendo en fracciones simples tenemos que

$$\frac{2x-8}{x^2+x-2} = \frac{2x-8}{(x-1)(x+2)} = \frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+2} = \frac{A(x+2)+B(x-1)}{(x-1)(x+2)} \Rightarrow 2x-8 = A(x+2)+B(x-1)$$

Si $x=-2 \Rightarrow -12=-3B \Rightarrow B=4$. Si $x=1 \Rightarrow -6=3A \Rightarrow A=-2$.

Ahora ya podemos finalizar la integral:

$$(*) = \frac{x^2}{2}+x+\int \frac{-2}{x-1}dx + \int \frac{4}{x+2}dx = \frac{x^2}{2}+x-2\ln(x-1)+4\ln(x+2)+C\,.$$

b) $\int x^2 \ln x\, dx = \begin{bmatrix} u = \ln x & du = \dfrac{1}{x}dx \\ dv = x^2 dx & v = \dfrac{x^3}{3} \end{bmatrix} = \dfrac{x^3}{3}\ln x - \int \dfrac{x^3}{3}\dfrac{1}{x}dx = \dfrac{x^3}{3}\ln x - \dfrac{1}{3}\int x^2 dx = \dfrac{x^3}{3}\ln x - \dfrac{x^3}{9} + C$.

16 Examen 33 (Septiembre 2017 – Propuesta A)

2A. Calcula razonadamente las siguiente integrales:

$$\text{a) } \int_0^{\pi} \left(x^2-1\right)\cos x\, dx \quad ; \quad \text{b) } \int \frac{e^x}{e^{2x}+e^x-2}dx$$

Solución.

a) Para hacer la integral definida $\int_0^{\pi}\left(x^2-1\right)\cos x\, dx$, primero calculamos la correspondiente integral indefinida.

$$\int \left(x^2-1\right)\cos x\, dx = \begin{bmatrix} u = x^2-1 & du = 2xdx \\ dv = \cos x\, dx & v = \operatorname{sen} x \end{bmatrix} = \left(x^2-1\right)\operatorname{sen} x - \int 2x \operatorname{sen} x\, dx =$$

$$= \begin{bmatrix} u = 2x & du = 2dx \\ dv = \operatorname{sen} x\, dx & v = -\cos x \end{bmatrix} = \left(x^2-1\right)\operatorname{sen} x - \left(-2x\cos x - \int -2\cos x\, dx\right) =$$

$$= \left(x^2-1\right)\operatorname{sen} x + 2x\cos x - 2\operatorname{sen} x + C = \left(x^2-3\right)\operatorname{sen} x + 2x\cos x + C.$$

Entonces: $\int_0^{\pi}\left(x^2-1\right)\cos x\, dx = \left[\left(x^2-3\right)\operatorname{sen} x + 2x\cos x\right]_0^{\pi} =$

$$= \left(\left(\pi^2-3\right)\operatorname{sen}\pi + 2\pi\cos\pi\right) - \left(\left(0^2-3\right)\operatorname{sen} 0 + 2\cdot 0\cos 0\right) = -2\pi.$$

b) $\int \dfrac{e^x}{e^{2x}+e^x-2}dx = \int \dfrac{e^x dx}{e^{2x}+e^x-2} = \begin{bmatrix} e^x = t \Rightarrow e^{2x} = \left(e^x\right)^2 = t^2 \\ e^x dx = dt \end{bmatrix} = \int \dfrac{dt}{t^2+t-2} = \int \dfrac{1}{t^2+t-2}dt = (*)$.

Descompongamos $\dfrac{1}{t^2+t-2}$ en fracciones simples. Como $t^2+t-2 = (t-1)(t+2)$, tenemos que

$$\frac{1}{t^2+t-2} = \frac{1}{(t-1)(t+2)} = \frac{A}{t-1} + \frac{B}{t+2} = \frac{A(t+2)+B(t-1)}{(t-1)(t+2)} \Rightarrow 1 = A(t+2)+B(t-1).$$

Si $t=1 \Rightarrow 1 = 3A \Rightarrow A = \dfrac{1}{3}$. Si $t=-2 \Rightarrow 1 = -3B \Rightarrow B = -\dfrac{1}{3}$. Entonces:

$$(*) = \int \frac{1/3}{t-1}dt + \int \frac{-1/3}{t+2}dt = \frac{1}{3}\ln(t-1) - \frac{1}{3}\ln(t+2) + C = \frac{1}{3}\ln\left(e^x-1\right) - \frac{1}{3}\ln\left(e^x+2\right) + C = \frac{1}{3}\ln\frac{e^x-1}{e^x+2} + C.$$

17. Examen 36 (Julio 2018 – Propuesta B)

2B. Calcula razonadamente las siguientes integrales:

$$\text{a) } \int \frac{2x^3-x^2+2}{x^2-x}dx \quad ; \quad \text{b) } \int_1^2 (2x-3)e^{x-1}dx$$

Solución.

a) $\int \frac{2x^3-x^2+2}{x^2-x}dx$. Se trata de una integral racional en la que el grado del numerado es mayor que el grado del denominador. Efectuando la división, se obtiene de cociente $2x+1$ y de resto $x+2$. De este modo tenemos que $2x^3-x^2+2=\left(x^2-x\right)(2x+1)+x+2 \Rightarrow \frac{2x^3-x^2+2}{x^2-x}=2x+1+\frac{x+2}{x^2-x}$. Por tanto:

$$\int \frac{2x^3-x^2+2}{x^2-x}dx=\int(2x+1)+\int \frac{x+2}{x^2-x}dx=x^2+x+\int \frac{x+2}{x^2-x}dx=(*)$$

$$\frac{x+2}{x^2-x}=\frac{x+2}{x(x-1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}=\frac{A(x-1)+Bx}{x(x-1)} \Rightarrow x+2=A(x-1)+Bx$$

Si $x=0 \Rightarrow 2=-A \Rightarrow A=-2$. Si $x=1 \Rightarrow 3=B$. Entonces, finalmente:

$$(*)=x^2+x+\int \frac{-2}{x}dx+\int \frac{3}{x-1}dx=x^2+x-2\ln x+3\ln(x-1)+C.$$

b) Para hacer la integral definida $\int_1^2(2x-3)e^{x-1}dx$, calculamos en primer lugar la correspondiente indefinida.

$$\int(2x-3)e^{x-1}dx=\begin{bmatrix} u=2x-3 & du=2dx \\ dv=e^{x-1}dx & v=e^{x-1} \end{bmatrix}=(2x-3)e^{x-1}-\int 2e^{x-1}dx=(2x-3)e^{x-1}-2e^{x-1}+C=$$

$=(2x-5)e^{x-1}+C$. Entonces $\int_1^2(2x-3)e^{x-1}dx=\left[(2x-5)e^{x-1}\right]_1^2=(-e)-(-3)=3-e$.

18 Examen 40 (Julio 2019 – Propuesta B)

2B. Calcula razonadamente las siguientes integrales:

$$\text{a) } \int_0^1(x+1)e^{-x}dx \quad ; \quad \text{b) } \int \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}dx$$

Solución.

a) Para calcular la integral definida $\int_0^1(x+1)e^{-x}dx$, calcularemos primero la correspondiente integral indefinida.

$$\int(x+1)e^{-x}dx=\begin{bmatrix} u=x+1 & du=dx \\ dv=e^{-x}dx & v=-e^{-x} \end{bmatrix}=(x+1)\left(-e^{-x}\right)-\int -e^{-x}dx=(-x-1)e^{-x}-e^{-x}+C=(-x-2)e^{-x}+C.$$

Entonces:

$$\int_0^1(x+1)e^{-x}dx=\left[(-x-2)e^{-x}\right]_0^1=\left(-3e^{-1}\right)-(-2)=2-3e^{-1}.$$

b) $$\int \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}dx=\begin{bmatrix} t=\sqrt{x} \Rightarrow t^2=x \\ dt=\frac{1}{2\sqrt{x}}dx=\frac{1}{2t}dx \Rightarrow dx=2tdt \end{bmatrix}=\int \frac{1}{t\left(1+t^2\right)}2tdt=\int \frac{2}{1+t^2}dt=2\int \frac{1}{1+t^2}dt=$$

$=2\operatorname{arctg} t+C=2\operatorname{arctg}\sqrt{x}+C$.