Integral indefinida. Cálculo de primitivas

1. Calcular $\int \frac{2x^2-4x+1}{x(x^2-2x+1)}\,dx$.

(junio 1997)

Solución:

Se trata de una integral racional. Así que descompongamos la fracción en fracciones simples.

$$\frac{2x^2-4x+1}{x(x^2-2x+1)}=\frac{2x^2-4x+1}{x(x-1)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{(x-1)^2}=\frac{A(x-1)^2+Bx(x-1)+Cx}{x(x-1)^2}=$$

$$=\frac{(A+B)x^2+(-2A-B+C)x+A}{x(x-1)^2}\Rightarrow\begin{cases}A+B=2\\-2A-B+C=-4\\A=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=1\\B=1\\C=-1\end{cases}.$$

Por tanto: $\int \frac{2x^2-4x+1}{x(x^2-2x+1)}\,dx=\int\frac{1}{x}\,dx+\int\frac{1}{x-1}\,dx+\int\frac{-1}{(x-1)^2}\,dx=\ln|x|+\ln|x-1|+\frac{1}{x-1}+C$. †

2. Calcular $\int \cos\sqrt{3x}\,dx$.

(septiembre 1997)

Solución:

Por cambio de variable: $\sqrt{3x}=t\Rightarrow\frac{3}{2\sqrt{3x}}\,dx=dt\Rightarrow\frac{3}{2t}\,dx=dt\Rightarrow dx=\frac{2t}{3}\,dt$.

Entonces, primero por sustitución y la que resulta por partes, tenemos:

$$\int\cos\sqrt{3x}\,dx=\frac{2}{3}\int t\cos t\,dt=\begin{bmatrix}u=t & dv=\cos t\,dt\\ du=dt & v=\operatorname{sen}t\end{bmatrix}=\frac{2}{3}\left(t\operatorname{sen}t-\int\operatorname{sen}t\,dt\right)=$$

$$=\frac{2}{3}\left(t\operatorname{sen}t-(-\cos t)\right)+C=\frac{2}{3}(t\operatorname{sen}t+\cos t)+C=\frac{2}{3}\left(\sqrt{3x}\operatorname{sen}\sqrt{3x}+\cos\sqrt{3x}\right)+C.\ \dagger$$

3. Calcular $I=\int(2x+4)e^{-5x}\,dx$.

(junio 1998)

Solución:

La integraremos por partes:

$$\int(2x+4)e^{-5x}\,dx=\begin{bmatrix}u=2x+4 & dv=e^{-5x}dx\\ du=2dx & v=-\frac{1}{5}e^{-5x}\end{bmatrix}=(2x+4)\left(-\frac{1}{5}e^{-5x}\right)-\int-\frac{2}{5}e^{-5x}\,dx=$$

$$= -\frac{2x+4}{5}e^{-5x} + \frac{2}{5}\int e^{-5x}\,dx = -\frac{2x+4}{5}e^{-5x} + \frac{2}{5}\left(-\frac{1}{5}e^{-5x}\right) + C = -\frac{1}{5}e^{-5x}\left(2x+\frac{22}{5}\right) + C\,.$$ †

4. Calcular la integral $I = \int \frac{x^2+4}{x^2-5x+4}\,dx$.

(septiembre 1998)

Solución:

Como el numerador y denominador tienen el mismo grado efectuamos la división. De la regla "dividendo igual a divisor por cociente más el resto", se obtiene: $x^2+4=\left(x^2-5x+4\right)\cdot 1+5x$. Dividiendo los dos miembros entre x^2-5x+4: $\frac{x^2+4}{x^2-5x+4}=1+\frac{5x}{x^2-5x+4}$. Descompongamos ahora la última fracción en fracciones simples:

$$\frac{5x}{x^2-5x+4}=\frac{5x}{(x-1)(x-4)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-4}=\frac{A(x-4)+B(x-1)}{(x-1)(x-4)}=$$

$$=\frac{(A+B)x+(-4A-B)}{(x-1)(x-4)} \Rightarrow \begin{cases} A+B=5 \\ -4A-B=0 \end{cases} \Rightarrow A=\frac{-5}{3};\ B=\frac{20}{3}\,.$$

Entonces: $\frac{x^2+4}{x^2-5x+4}=1+\frac{5x}{x^2-5x+4}=1-\frac{5}{3(x-1)}+\frac{20}{3(x-4)}$.

Por tanto: $\int \frac{x^2+4}{x^2-5x+4}\,dx=\int dx-\frac{5}{3}\int\frac{1}{x-1}\,dx+\frac{20}{3}\int\frac{1}{x-4}\,dx = x-\frac{5}{3}\ln|x-1|+\frac{20}{3}\ln|x-4|+C\,.$ †

5. Calcular $\int \frac{x^2+1}{x^2-4x+13}\,dx$.

(junio 1999)

Solución:

Al igual que en el ejercicio anterior, efectuando la división se tiene:

$$x^2+1=\left(x^2-4x+13\right)\cdot 1+4x \Rightarrow \frac{x^2+1}{x^2-4x+13}=1+\frac{4x}{x^2-4x+13}$$

El polinomio $x^2-4x+13$ no tiene raíces reales. Descompongamos el numerador buscando una expresión que sea la derivada del denominador, es decir, $2x-4$: $4x=2\cdot 2x=2(2x-4+4)=2(2x-4)+8$.

Entonces: $\frac{4x}{x^2-4x+13}=\frac{2(2x-4)}{x^2-4x+13}+\frac{8}{x^2-4x+13}$. Por tanto:

$$\int\frac{x^2+1}{x^2-4x+13}\,dx=\int\left(1+\frac{4x}{x^2-4x+13}\right)dx=\int\left(1+\frac{2(2x-4)}{x^2-4x+13}+\frac{8}{x^2-4x+13}\right)dx=$$

$$=\int dx+2\int\frac{2x-4}{x^2-4x+13}\,dx+\int\frac{8}{x^2-4x+13}\,dx=\textbf{(*)}$$

La última integral se calcula modificando adecuadamente la expresión $x^2-4x+13$ en otra del tipo $(x-m)^2+n^2$. En este caso $x^2-4x+13=(x-2)^2+3^2$. Por tanto:

$$\textbf{(*)}=\int dx+2\int\frac{2x-4}{x^2-4x+13}\,dx+\int\frac{8}{(x-2)^2+3^2}\,dx=\int dx+2\int\frac{2x-4}{x^2-4x+13}\,dx+\int\frac{\frac{8}{9}}{\left(\frac{x-2}{3}\right)^2+1}\,dx=$$

$$=\int dx+2\int\frac{2x-4}{x^2-4x+13}\,dx+\frac{8}{3}\int\frac{\frac{1}{3}}{\left(\frac{x-2}{3}\right)^2+1}\,dx=x+2\ln\left|x^2-4x+13\right|+\frac{8}{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{x-2}{3}\right)+C\,.\ \dagger$$

6. Calcular $\int x^3e^{-4x^2}\,dx$.

(septiembre 1999)

Solución:

Procederemos por partes. Como la derivada de la función $y=e^{-4x^2}$ es $y'=-8xe^{-4x^2}$, tomaremos como función $u=x^2$, para que $dv=xe^{-4x^2}dx$ sea fácil de integrar:

$$\int x^3e^{-4x^2}\,dx=\begin{bmatrix}u=x^2 & dv=xe^{-4x^2}dx\\ du=2xdx & v=-\frac{1}{8}e^{-4x^2}\end{bmatrix}=-\frac{1}{8}x^2e^{-4x^2}-\int 2x\left(-\frac{1}{8}e^{-4x^2}\right)dx=$$

$$=-\frac{1}{8}x^2e^{-4x^2}+\frac{1}{4}\int xe^{-4x^2}=-\frac{1}{8}x^2e^{-4x^2}+\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{8}\right)\int -8xe^{-4x^2}=-\frac{1}{8}x^2e^{-4x^2}+\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{8}\right)e^{-4x^2}+C=$$

$$=-\frac{1}{8}x^2e^{-4x^2}+\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{8}\right)e^{-4x^2}+C=-\frac{1}{8}e^{-4x^2}\left(x^2+\frac{1}{4}\right)+C\,.\ \dagger$$

7. Calcular $\int\frac{x+1}{x^3+x^2-6x}\,dx$.

(junio 2000)

Solución:

$$\frac{x+1}{x^3+x^2-6x}=\frac{x+1}{x(x-2)(x+3)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x+3}=$$

$$=\frac{A(x-2)(x+3)+Bx(x+3)+Cx(x-2)}{x(x-2)(x+3)}=\frac{(A+B+C)x^2+(A+3B-2C)x-6A}{x(x-2)(x+3)}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A+B+C=0 \\ A+3B-2C=1 \\ -6A=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=-\dfrac{1}{6} \\ B=\dfrac{3}{10} \\ C=-\dfrac{2}{15} \end{cases} \Rightarrow \frac{x+1}{x^3+x^2-6x}=-\frac{1}{6x}+\frac{3}{10(x-2)}-\frac{2}{15(x+3)}.$$

Por tanto, $\displaystyle\int \frac{x+1}{x^3+x^2-6x}\,dx=-\frac{1}{6}\int\frac{1}{x}\,dx+\frac{3}{10}\int\frac{1}{x-2}\,dx-\frac{2}{15}\int\frac{1}{x+3}\,dx=$

$$=-\frac{1}{6}\ln|x|+\frac{3}{10}\ln|x-2|-\frac{2}{15}\ln|x+3|+C\,.\ †$$

---

8. Calcular $\displaystyle\int \frac{3x}{x^2+2x+3}\,dx$.

(septiembre 2000)

Solución:

El polinomio x^2+2x+3 no tiene raíces reales. Descompongamos el numerador buscando una expresión que sea la derivada del denominador, es decir, 2x + 2:

$$3x=\frac{3}{2}\cdot 2x=\frac{3}{2}(2x+2-2)=\frac{3}{2}(2x+2)-3\,.$$

Entonces: $\displaystyle\frac{3x}{x^2+2x+3}=\frac{3}{2}\cdot\frac{2x+2}{x^2+2x+3}-\frac{3}{x^2+2x+3}$. De este modo:

$$\int\frac{3x}{x^2+2x+3}\,dx=\frac{3}{2}\int\frac{2x+2}{x^2+2x+3}\,dx-3\int\frac{1}{x^2+2x+3}\,dx=\textbf{(*)}$$

La última integral se calcula modificando adecuadamente la expresión x^2+2x+3 en otra del tipo $(x-m)^2+n^2$. En este caso $x^2+2x+3=(x^2+2x+1)+2=(x+1)^2+2$. Por tanto:

$$\textbf{(*)}\ =\frac{3}{2}\int\frac{2x+2}{x^2+2x+3}\,dx-3\int\frac{1}{(x+1)^2+2}\,dx=\frac{3}{2}\int\frac{2x+2}{x^2+2x+3}\,dx-3\int\frac{\frac{1}{2}}{\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)^2+1}\,dx=$$

$$=\frac{3}{2}\ln\left(x^2+2x+3\right)-\frac{3\sqrt{2}}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)+C\,.\ †$$

---

9. Resuelve $\displaystyle\int\frac{x^2-1}{x(x^2+1)}\,dx$.

(junio 2001)

Solución:

$$\frac{x^2-1}{x\left(x^2+1\right)}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+1}=\frac{A\left(x^2+1\right)+\left(Bx+C\right)x}{x\left(x^2+1\right)}=\frac{\left(A+B\right)x^2+Cx+A}{x\left(x^2+1\right)}\Rightarrow\begin{cases}A+B=1\\C=0\\A=-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=-1\\B=2\\C=0\end{cases}.$$

Entonces: $\displaystyle\int\frac{x^2-1}{x\left(x^2+1\right)}dx=\int\frac{-1}{x}dx+\int\frac{2x}{x^2+1}dx=-\ln|x|+\ln\left|x^2+1\right|+C=\ln\left|\frac{x^2+1}{x}\right|+C$. †

---

10. Calcula $\displaystyle\int\frac{x+2}{x^3-4x^2+4x}dx$.

(septiembre 2001)

Solución:

$$\frac{x+2}{x^3-4x^2+4x}=\frac{x+2}{x\left(x-2\right)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{\left(x-2\right)^2}=\frac{A\left(x-2\right)^2+Bx\left(x-2\right)+Cx}{x\left(x-2\right)^2}=$$

$$=\frac{\left(A+B\right)x^2+\left(-4A-2B+C\right)x+4A}{x\left(x-2\right)^2}\Rightarrow\begin{cases}A+B=0\\-4A-2B+C=1\\4A=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=\dfrac{1}{2}\\B=-\dfrac{1}{2}\\C=2\end{cases}.$$

Por tanto: $\displaystyle\int\frac{x+2}{x^3-4x^2+4x}dx=\frac{1}{2}\int\frac{1}{x}dx-\frac{1}{2}\int\frac{1}{x-2}dx+2\int\frac{1}{(x-2)^2}dx=$

$$=\frac{1}{2}\ln|x|-\frac{1}{2}\ln|x-2|-\frac{2}{x-2}+C=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x}{x-2}\right|-\frac{2}{x-2}+C=\ln\sqrt{\left|\frac{x}{x-2}\right|}-\frac{2}{x-2}+C\ .\ †$$

---

11. Calcula $\displaystyle\int\frac{x^2-2}{x^3-3x+2}dx$.

(septiembre 2002)

Solución:

$$\frac{x^2-2}{x^3-3x+2}=\frac{x^2-2}{(x+2)(x-1)^2}=\frac{A}{x+2}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{(x-1)^2}=$$

$$=\frac{A\left(x-1\right)^2+B\left(x+2\right)\left(x-1\right)+C\left(x+2\right)}{\left(x+2\right)\left(x-1\right)^2}=\frac{\left(A+B\right)x^2+\left(-2A+B+C\right)x+\left(A-2B+2C\right)}{\left(x+2\right)\left(x-1\right)^2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A+B=1 \\ -2A+B+C=0 \\ A-2B+2C=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=\dfrac{2}{9} \\ B=\dfrac{7}{9} \\ C=-\dfrac{1}{3} \end{cases} .$$

Por tanto $\displaystyle\int \frac{x^2-2}{x^3-3x+2}\,dx = \frac{2}{9}\int \frac{1}{x+2}\,dx + \frac{7}{9}\int \frac{1}{x-1}\,dx - \frac{1}{3}\int \frac{1}{(x-1)^2}\,dx =$

$\displaystyle = \frac{2}{9}\ln|x+2| + \frac{7}{9}\ln|x-1| + \frac{1}{3(x-1)} + C$. †

---

12. Calcula la siguiente integral: $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x}\,dx$.

(septiembre 2003)

Solución:

Procedamos por partes:

$\displaystyle\int \frac{\ln x}{x}\,dx = \begin{bmatrix} u=\ln x & dv=\dfrac{1}{x}dx \\ du=\dfrac{1}{x}dx & v=\ln x \end{bmatrix} = \ln x \ln x - \int \frac{\ln x}{x}\,dx$. Pasando al primer miembro la integral $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x}\,dx$ tenemos: $\displaystyle 2\int \frac{\ln x}{x}\,dx = (\ln x)^2 \Rightarrow \int \frac{\ln x}{x}\,dx = \frac{(\ln x)^2}{2} + C$. †

---

13. Determina $f(x)$ sabiendo que $f'''(x)=24x$, $f''(0)=2$, $f'(0)=1$ y $f(0)=0$.

(junio 2005)

Solución:

$f''(x)$ será una primitiva de $f'''(x)=24x$. Por tanto, $f''(x)=12x+C$. Como $f''(0)=2$, entonces tenemos que $f''(0)=12\cdot 0^2+C=2 \Rightarrow C=2$, con lo que $f''(x)=12x^2+2$.

Una primitiva de esta última es $f'(x)=4x^3+2x+C$. Pero $f'(0)=1$. Entonces $C=1$, con lo que $f'(x)=4x^3+2x+1$.

Finalmente, $f(x)$ será una primitiva de $f'(x)$. Es decir, $f(x)=x^4+x^2+x+C$, y como $f(0)=0$, tenemos que $C=0$ y, por tanto, $f(x)=x^4+x^2+x$. †

14. Calcula la primitiva de $\int \frac{x+\sqrt{x}}{x^2}\,dx$.

(septiembre 2005)

Solución:

Si descomponemos la fracción, usando las propiedades de las potencias podemos escribir la integral como la suma de dos integrales inmediatas.

$$\int \frac{x+\sqrt{x}}{x^2}\,dx = \int \frac{x}{x^2}\,dx + \int \frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^2}\,dx = \int \frac{1}{x}\,dx + \int x^{\frac{-3}{2}}\,dx = \ln|x| + \frac{x^{\frac{-1}{2}}}{\frac{-1}{2}} + C = \ln|x| - \frac{2}{\sqrt{x}} + C = \ln|x| - \frac{2\sqrt{x}}{x} + C\,.$$ †

15. Calcula la integral indefinida $\int \frac{x+2}{x^3-2x+1}\,dx$.

(junio 2006)

Solución:

Asumimos que las raíces del polinomio x^3-2x+1 son $x=1$, $x=-\frac{\sqrt{5}}{2}-\frac{1}{2}$ y $x=\frac{\sqrt{5}}{2}-\frac{1}{2}$.

$$\frac{x+2}{x^3-2x+1} = \frac{x+2}{(x-1)\left(x+\frac{\sqrt{5}}{2}+\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{\sqrt{5}}{2}+\frac{1}{2}\right)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+\frac{\sqrt{5}}{2}+\frac{1}{2}} + \frac{C}{x-\frac{\sqrt{5}}{2}+\frac{1}{2}} =$$

$$= \frac{A\left(x+\frac{\sqrt{5}}{2}+\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{\sqrt{5}}{2}+\frac{1}{2}\right)+B(x-1)\left(x-\frac{\sqrt{5}}{2}+\frac{1}{2}\right)+C(x-1)\left(x+\frac{\sqrt{5}}{2}+\frac{1}{2}\right)}{(x-1)\left(x+\frac{\sqrt{5}}{2}+\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{\sqrt{5}}{2}+\frac{1}{2}\right)} =$$

$$= \frac{Ax^2+Ax-A+Bx^2-\left(\frac{\sqrt{5}}{2}+\frac{1}{2}\right)Bx+\left(\frac{\sqrt{5}}{2}-\frac{1}{2}\right)B+Cx^2+\left(\frac{\sqrt{5}}{2}-\frac{1}{2}\right)Cx-\left(\frac{\sqrt{5}}{2}+\frac{1}{2}\right)C}{(x-1)\left(x+\frac{\sqrt{5}}{2}+\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{\sqrt{5}}{2}+\frac{1}{2}\right)} =$$

$$= \frac{(A+B+C)x^2+\left(A-\left(\frac{\sqrt{5}}{2}+\frac{1}{2}\right)B+\left(\frac{\sqrt{5}}{2}-\frac{1}{2}\right)C\right)x+\left(-A+\left(\frac{\sqrt{5}}{2}-\frac{1}{2}\right)B-\left(\frac{\sqrt{5}}{2}+\frac{1}{2}\right)C\right)}{(x-1)\left(x+\frac{\sqrt{5}}{2}+\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{\sqrt{5}}{2}+\frac{1}{2}\right)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A+B+C=0 \\ A-\left(\dfrac{\sqrt{5}}{2}+\dfrac{1}{2}\right)B+\left(\dfrac{\sqrt{5}}{2}-\dfrac{1}{2}\right)C=1 \\ -A+\left(\dfrac{\sqrt{5}}{2}-\dfrac{1}{2}\right)B-\left(\dfrac{\sqrt{5}}{2}+\dfrac{1}{2}\right)C=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=3 \\ B=\dfrac{7\sqrt{5}}{10}-\dfrac{3}{2} \\ C=-\dfrac{7\sqrt{5}}{10}-\dfrac{3}{2} \end{cases}$$

Por tanto:

$$\int \frac{x+2}{x^3-2x+1}dx = 3\int \frac{1}{x-1}dx + \left(\frac{7\sqrt{5}}{10}-\frac{3}{2}\right)\int \frac{1}{x+\dfrac{\sqrt{5}}{2}+\dfrac{1}{2}}dx + \left(-\frac{7\sqrt{5}}{10}-\frac{3}{2}\right)\int \frac{1}{x+\dfrac{\sqrt{5}}{2}-\dfrac{1}{2}}dx =$$

$$= 3\ln|x-1| + \left(\frac{7\sqrt{5}}{10}-\frac{3}{2}\right)\ln\left|x+\frac{\sqrt{5}}{2}+\frac{1}{2}\right| + \left(-\frac{7\sqrt{5}}{10}-\frac{3}{2}\right)\ln\left|x+\frac{\sqrt{5}}{2}-\frac{1}{2}\right| + C \,. \dagger$$

---

16. Calcula la siguiente integral: $\displaystyle\int \frac{x^3+1}{x^2+4}dx$.

(septiembre 2006)

Solución:

Efectuando la división se tiene: $x^3+1=\left(x^2+4\right)x+(-4x+1)$. Dividiendo ambos miembros entre x^2+4:

$$\frac{x^3+1}{x^2+4}=x+\frac{-4x+1}{x^2+4}.$$

Por tanto, $\displaystyle\int \frac{x^3+1}{x^2+4}dx = \int xdx + \int \frac{-4x+1}{x^2+4}dx = \int xdx + \int \frac{-4x}{x^2+4}dx + \int \frac{1}{x^2+4}dx =$

$$= \int xdx - 2\int \frac{2x}{x^2+4}dx + \frac{1}{2}\int \frac{\frac{1}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2+1}dx = \frac{x^2}{2} - 2\ln\left|x^2+4\right| + \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{2}\right) + C \,. \dagger$$

---

17. Calcula la siguiente integral: $\displaystyle\int \frac{2}{1+\sqrt{x}}dx$.

(Indicación: Puede ayudarte realizar un cambio de variable adecuado.)

(junio 2007)

Solución:

Llamemos $1+\sqrt{x}=t$. Entonces $\frac{1}{2\sqrt{x}}dx=dt\Rightarrow dx=2\sqrt{x}dt\Rightarrow dx=2(t-1)dt$. Sustituyendo:

$$\int\frac{2}{1+\sqrt{x}}dx=\int\frac{2}{t}2(t-1)dt=4\int\frac{t-1}{t}dt=4\int\left(1-\frac{1}{t}\right)dt=4\left(t-\ln|t|\right)+C=$$

$$4\left(1+\sqrt{x}-\ln\left|1+\sqrt{x}\right|\right)+C=4\sqrt{x}-4\ln\left|1+\sqrt{x}\right|+C'$$, donde se ha llamado $C'=4+C$. †

---

18. Calcula la siguiente integral: $\int\frac{x}{(x+1)^3}dx$.

(septiembre 2007)

Solución:

$$\frac{x}{(x+1)^3}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{(x+1)^2}+\frac{C}{(x+1)^3}=\frac{A(x+1)^2+B(x+1)+C}{(x+1)^3}=$$

$$=\frac{Ax^2+(2A+B)x+(A+B+C)}{(x+1)^3}\Rightarrow\begin{cases}A=0\\2A+B=1\\A+B+C=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=0\\B=1\\C=-1\end{cases}$$

Entonces $\frac{x}{(x+1)^3}=\frac{1}{(x+1)^2}-\frac{1}{(x+1)^3}$, y por tanto:

$$\int\frac{x}{(x+1)^3}dx=\int\frac{1}{(x+1)^2}dx-\int\frac{1}{(x+1)^3}dx=\frac{-1}{x+1}+\frac{1}{2(x+1)^2}+C=-\frac{2x+1}{2(x+1)^2}+C.$$ †

---

19. Calcula la integral $\int\frac{2x^3-9x^2+9x+6}{x^2-5x+6}dx$.

(junio 2008)

Solución:

Efectuando la división se tiene $2x^3-9x^2+9x+6=\left(x^2-5x+6\right)\left(2x+1\right)+2x$. Dividiendo los dos miembros entre x^2-5x+6 tenemos: $\frac{2x^3-9x^2+9x+6}{x^2-5x+6}=2x+1+\frac{2x}{x^2-5x+6}$.

Además:

$$\frac{2x}{x^2-5x+6}=\frac{2x}{(x-2)(x-3)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-3}=\frac{A(x-3)+B(x-2)}{(x-2)(x-3)}=\frac{(A+B)x+(-3A-2B)}{(x-2)(x-3)}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}A+B=2\\-3A-2B=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=-4\\B=6\end{cases}.$$

Entonces:

$$\frac{2x^3-9x^2+9x+6}{x^2-5x+6}=2x+1+\frac{2x}{x^2-5x+6}=2x+1+\frac{-4}{x-2}+\frac{6}{x-3}.$$

Por tanto:

$$\int\frac{2x^3-9x^2+9x+6}{x^2-5x+6}\,dx=\int(2x+1)\,dx-4\int\frac{1}{x-2}\,dx+6\int\frac{1}{x-3}\,dx=x^2+x-4\ln|x-2|+6\ln|x-3|+C.$$ †

20. Calcula las siguientes integrales:

a) $\int(\cos 2x+\operatorname{sen}x\cos x)\,dx$.

b) $\int\frac{x^3-1}{x+2}\,dx$.

(junio 2011)

Solución:

a) $\int(\cos 2x+\operatorname{sen}x\cos x)\,dx=\int\cos 2x\,dx+\int\operatorname{sen}x\cos x\,dx$

La primera de las integrales anteriores es inmediata: $\int\cos 2x\,dx=\frac{1}{2}\int 2\cos 2x\,dx=\frac{1}{2}\operatorname{sen}2x+C$.

La segunda la integraremos por partes.

$$\int\operatorname{sen}x\cos x\,dx=\begin{bmatrix}u=\operatorname{sen}x & dv=\cos x\,dx\\ du=\cos x\,dx & v=\operatorname{sen}x\end{bmatrix}=\operatorname{sen}x\operatorname{sen}x-\int\operatorname{sen}x\cos x\,dx.$$

Pasando la última integral al primer miembro y despejando, tenemos:

$$2\int\operatorname{sen}x\cos x\,dx=\operatorname{sen}^2x\Rightarrow\int\operatorname{sen}x\cos x\,dx=\frac{1}{2}\operatorname{sen}^2x+C.$$

Esta integral realmente también es inmediata. Basta darse cuenta que la derivada del seno es el coseno.

Por tanto: $\int(\cos 2x+\operatorname{sen}x\cos x)\,dx=\int\cos 2x\,dx+\int\operatorname{sen}x\cos x\,dx=\frac{1}{2}\operatorname{sen}2x+\frac{1}{2}\operatorname{sen}^2x+C$.

b) Es una integral racional. Efectuando la división tenemos, por un proceso ya repetido anteriormente, que

$$x^3-1=(x+2)(x^2-2x+4)-9\Rightarrow\frac{x^3-1}{x+2}=x^2-2x+4-\frac{9}{x+2}.$$

Entonces:

$$\int\frac{x^3-1}{x+2}\,dx=\int(x^2-2x+4)\,dx-\int\frac{9}{x+2}\,dx=\frac{x^3}{3}-x^2+4x-9\ln|x+2|+C.$$