Examen de Matemáticas I – 1º de Bachillerato – Final Junio

1. Resuelve las siguientes ecuaciones **(2 puntos; 1 por apartado)**

a) $\dfrac{5}{x+2}+\dfrac{x}{x+3}=3$

b) $\sqrt{2x-3}+\sqrt{x+7}=4$

2. Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones: $\begin{cases}\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{5}{6}\\ 2x+3y=2\end{cases}$ **(1 punto)**

3. Resuelve el siguientes sistema de inecuaciones: $\begin{cases}\dfrac{x-1}{3}\leq 2\\ \dfrac{3x+1}{2}-\dfrac{3x-6}{4}>2\end{cases}$ **(1 punto)**

4. Un grifo A tarda en llenar un depósito el doble de tiempo que otro B. Abiertos simultáneamente, llenan el depósito en dos horas. ¿Cuánto tarda cada grifo por separado? **(1 punto)**

5. Hallar una recta perpendicular y otra paralela a la recta $r\equiv 2x-5y+4=0$ que pasen ambas por el punto $P(-3,\,0)$ **(1 punto)**

6. Calcula los siguientes límites **(1 punto; 0,5 puntos por apartado)**:

c) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{5x^2+5x-10}{3x^3-6x^2-3x+6}$; **b)** $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{3x^4-3x^5+7}{6x^3+5x^4-2x^2-x+2}$

7. Estudia la continuidad de la función $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{x+2} & \text{si} \quad x<-1\\ 3 & \text{si} \quad x=-1\\ x^2-2 & \text{si} \quad -1<x<3\\ \dfrac{4}{x-1}+5 & \text{si} \quad x\geq 3\end{cases}$ en los puntos $x=-1$ y $x=3$. Caso de que no sea continua en alguno de ellos explica el tipo de discontinuidad. **(1 punto)**

8. Dada la función $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2+x-2}$, contesta a los siguientes apartados:

d) Halla los puntos de corte con los ejes. **(0,5 puntos)**

e) Halla las asíntotas verticales y horizontales. **(1 punto)**

f) Realiza una representación gráfica aproximada de la función. **(0,5 puntos)**

Soluciones

1. Resolución de ecuaciones.

a) $\frac{5}{x+2}+\frac{x}{x+3}=3\Rightarrow\frac{5(x+3)}{(x+2)(x+3)}+\frac{x(x+2)}{(x+2)(x+3)}=\frac{3(x+2)(x+3)}{(x+2)(x+3)}\Rightarrow$

$\Rightarrow 5x+15+x^2+2x=3x^2+9x+6x+18\Rightarrow 2x^2+8x+3=0$. El discriminante de la ecuación anterior es $\Delta=8^2-4\cdot2\cdot3=64-24=40$. Por tanto: $x=\frac{-8\pm\sqrt{40}}{2\cdot2}=\frac{-8\pm2\sqrt{10}}{4}=-2\pm\frac{\sqrt{10}}{2}$

b) $\sqrt{2x-3}+\sqrt{x+7}=4\Rightarrow\left(\sqrt{2x-3}+\sqrt{x+7}\right)^2=4^2\Rightarrow 2x-3+x+7+2\sqrt{(2x-3)(x+7)}=16\Rightarrow$

$\Rightarrow 2\sqrt{2x^2+11x-21}=12-3x\Rightarrow\left(2\sqrt{2x^2+11x-21}\right)^2=(12-3x)^2\Rightarrow 4\left(2x^2+11x-21\right)=144-72x+9x^2$

$\Rightarrow 8x^2+44x-84=144-72x+9x^2\Rightarrow x^2-116x+228=0$. El discriminante de la ecuación anterior es $\Delta=(-116)^2-4\cdot1\cdot228=13456-912=12544\Rightarrow x=\frac{116\pm\sqrt{12544}}{2\cdot1}=\frac{116\pm112}{2}=\begin{cases}x_1=114\\x_2=2\end{cases}$.

La solución $x_1=114$ debe descartarse pues $\sqrt{2\cdot114-3}+\sqrt{114+7}=\sqrt{225}+\sqrt{121}=15+11=26\neq4$.

2. Resolución del sistema de ecuaciones $\begin{cases}\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{5}{6}\\2x+3y=2\end{cases}$

Despejando y de la segunda ecuación tenemos: $x=\frac{2-3y}{2}$. Sustituyendo en la primera ecuación:

$\frac{2}{2-3y}+\frac{1}{y}=\frac{5}{6}\Rightarrow12y+6(2-3y)=5y(2-3y)\Rightarrow12y+12-18y=10y-15y^2\Rightarrow15y^2-16y+12=0$. El discriminante de esta ecuación de segundo grado es $\Delta=(-16)^2-4\cdot15\cdot12=256-720=-464<0$. Por tanto, la ecuación $15y^2-16y+12=0$ no tiene soluciones reales y tampoco el sistema propuesto.

3. Resolución del sistema de inecuaciones $\begin{cases}\frac{x-1}{3}\leq2\\\frac{3x+1}{2}-\frac{3x-6}{4}>2\end{cases}$

Solución de la primera inecuación: $\frac{x-1}{3}\leq2\Rightarrow x-1\leq6\Rightarrow x\leq7$.

Solución de la segunda inecuación: $\frac{3x+1}{2}-\frac{3x-6}{4}>2\Rightarrow6x+2-3x+6>8\Rightarrow3x>0\Rightarrow x>0$.

Por tanto la solución es el conjunto $\{x\in\mathbb{R}:x\leq7,x>0\}$ que, en forma de intervalo es $(0,7]$.

4. Un grifo A tarda en llenar un depósito el doble de tiempo que otro B. Abiertos simultáneamente, llenan el depósito en dos horas. ¿Cuánto tarda cada grifo por separado?

Llamemos x a la parte del depósito que el grifo A llena en una hora. Entonces el grifo B llenará $2x$ partes en el mismo tiempo. Los dos juntos, en una hora, llenarán $3x$ partes, que constituye la mitad del depósito pues ambos abiertos simultáneamente llenan el depósito en dos horas.

De este modo, $3x=\frac{1}{2}\Rightarrow x=\frac{1}{6}$, lo que quiere decir que el grifo A tarda 6 horas en llenar el depósito, ya que en una hora llena la sexta parte. Así, el grifo B tardará la mitad, es decir, 3 horas.

5. Hallar una recta perpendicular y otra paralela a la recta $r\equiv 2x-5y+4=0$ que pasen ambas por el punto $P(-3,\,0)$.

Un vector director de r es $\vec{u}=(5,2)$. Por tanto, la recta paralela a r que pasa por $P(-3,0)$ es

$$s\equiv\frac{x+3}{5}=\frac{y}{2}\Rightarrow s\equiv 2x+6=5y\Rightarrow s\equiv 2x-5y+6=0.$$

Un vector perpendicular a $\vec{u}$ es $\vec{v}=(-2,5)$. Por tanto, la recta perpendicular a r que pasa por $P(-3,0)$ es

$$t\equiv\frac{x+3}{-2}=\frac{y}{5}\Rightarrow t\equiv 5x+15=-2y\Rightarrow t\equiv 5x+2y+15=0.$$

6. Cálculo de límites

a) $$\lim_{x\to 1}\frac{5x^2+5x-10}{3x^3-6x^2-3x+6}=\left[\text{Indeterminación }\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(5x+10)}{(x-1)(3x^2-3x-6)}=\lim_{x\to 1}\frac{5x+10}{3x^2-3x-6}=\frac{15}{-6}=-\frac{5}{2}$$

b) $$\lim_{x\to-\infty}\frac{3x^4-3x^5+7}{6x^3+5x^4-2x^2-x+2}=\left[\text{Indeterminación }\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to-\infty}\frac{-3x^5}{5x^4}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-3x}{5}=+\infty.$$

7. Estudia la continuidad de la función $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{x+2} & \text{si } x<-1\\ 3 & \text{si } x=-1\\ x^2-2 & \text{si } -1<x<3\\ \dfrac{4}{x-1}+5 & \text{si } x\geq 3\end{cases}$ en los puntos $x=-1$ y $x=3$. Caso de que no sea continua en alguno de ellos explica el tipo de discontinuidad.

- En $x=-1$ tenemos: $\left.\begin{array}{l}\displaystyle\lim_{x\to-1^-}f(x)=\lim_{x\to-1^-}\frac{x}{x+2}=\frac{-1}{-1+2}=-1\\ \displaystyle\lim_{x\to-1^+}f(x)=\lim_{x\to-1^+}(x^2-2)=1-2=-1\end{array}\right\}\Rightarrow\lim_{x\to-1}f(x)=-1\neq f(-1)=3$. De lo anterior deducimos que f no es continua en $x=-1$: en tal punto hay una discontinuidad evitable.

- En $x=3$ tenemos: $\left.\begin{array}{l}\displaystyle\lim_{x\to3^-}f(x)=\lim_{x\to3^-}(x^2-2)=9-2=7\\ \displaystyle\lim_{x\to3^+}f(x)=\lim_{x\to3^+}\left(\frac{4}{x-1}+5\right)=\frac{4}{3-1}+5=7\end{array}\right\}\Rightarrow\lim_{x\to3}f(x)=7=f(-1)$. Por tanto, f es continua en $x=3$.

8. Dada la función $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2+x-2}$, contesta a los siguientes apartados:

a) Halla los puntos de corte con los ejes.

Con el eje X: $y=0\Rightarrow\dfrac{x+1}{x^2+x-2}=0\Rightarrow x+1=0\Rightarrow x=-1$: $(-1,0)$.

Con el eje Y: $x=0\Rightarrow y=\dfrac{1}{-2}=-\dfrac{1}{2}$: $\left(0,-\dfrac{1}{2}\right)$.

b) Halla las asíntotas verticales y horizontales.

- $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x+1}{x^2+x-2} = \left[\dfrac{-1}{0}\right] = \begin{cases} -\infty & \text{si} \quad x \to -2^- \\ +\infty & \text{si} \quad x \to -2^+ \end{cases} \Rightarrow x=-2$ es una asíntota vertical.
- $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x+1}{x^2+x-2} = \left[\dfrac{2}{0}\right] = \begin{cases} -\infty & \text{si} \quad x \to 1^- \\ +\infty & \text{si} \quad x \to 1^+ \end{cases} \Rightarrow x=1$ es una asíntota vertical.
- $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x+1}{x^2+x-2} = 0$ (pues el grado del numerador es menor que el grado del denominador). Entonces $y=0$ (el eje X) es una asíntota horizontal.

c) Realiza una representación gráfica aproximada de la función.