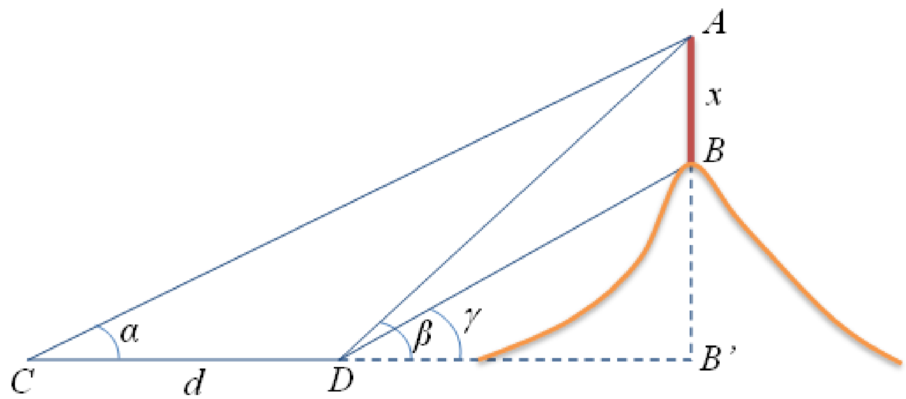
Usos de la trigonometría. Cálculo de alturas y distancias (VII)

Altura de un objeto situado sobre un montículo, desde un terreno horizontal sin obstáculos

Deseamos calcular la altura $\overline{AB} = x$ de un objeto situado sobre un montículo o punto elevado, desde un terreno horizontal sin obstáculos en el que estamos situados, tal y como se muestra en la figura.



Elegimos un punto C arbitrario y medimos el ángulo de elevación de A, que llamaremos α. Moviéndonos en el plano determinado por A, B y C nos desplazamos hasta un punto D y medimos $\overline{CD} = d$, desde donde calculamos los respectivos ángulos de elevación de A y de B, a los que llamaremos β y γ, respectivamente.
El método a seguir consiste en calcular $\overline{AD}$ en el triángulo ACD aplicando el teorema de los senos. Téngase en cuenta que en el triángulo ACD conocemos $\overline{CD} = d$ y dos ángulos, $\widehat{ACD} = \alpha$ y $\widehat{ADC} = 180^\circ - \beta$, lo que significa que también podemos calcular el tercero de los ángulos: $\widehat{CAD} = 180^\circ - (\alpha + 180^\circ - \beta) = \beta - \alpha$.

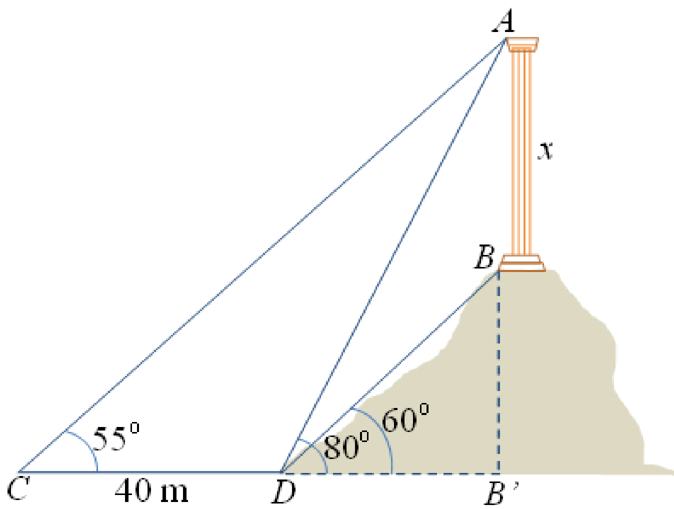
$$\frac{\overline{AD}}{\text{sen }\widehat{ACD}} = \frac{d}{\text{sen }\widehat{CAD}} \Rightarrow \overline{AD} = \frac{d \cdot \text{sen }\alpha}{\text{sen}(\beta - \alpha)}$$

Finalmente, con el resultado anterior, se calcula x en el triángulo ABD aplicando otra vez el teorema de los senos. En este triángulo conocemos un lado, $\overline{AD}$ y dos ángulos, $\widehat{ADB} = \beta - \gamma$ y $\widehat{DAB} = 90^\circ - \beta$. Al igual que anteriormente esta información permite calcular el tercero de los ángulos: $\widehat{ABD} = 180^\circ - (\beta - \gamma + 90^\circ - \beta) = 90^\circ + \gamma$.

$$\frac{x}{\text{sen }\widehat{ADB}} = \frac{\overline{AD}}{\text{sen }\widehat{ABD}} \Rightarrow x = \frac{\overline{AD} \cdot \text{sen}(\beta - \gamma)}{\text{sen}(90^\circ + \gamma)}$$

Ejemplo.
Una columna está situada sobre un peñón. Desde un punto C la parte superior de la misma se ve con un ángulo de elevación de 55°. Situándonos en un punto D, 40 metros más cerca, se constata que dicho ángulo de elevación se transforma en 80°y que el ángulo de elevación a la base de la columna es de 60°. ¿Cuál es la altura de la columna?

Solución.



Si nos fijamos en la figura anterior, los datos que proporciona el enunciado del problema son los siguientes. $\alpha = 55°$, $\beta = 80°$, $\gamma = 60°$ y $d = 40$ metros. Entonces, en el triángulo ACD tenemos:

$$\overline{AD} = \frac{d \cdot \operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{sen}(\beta - \alpha)} = \frac{40 \cdot \operatorname{sen} 55°}{\operatorname{sen} 25°} \approxeq 77{,}53$$

Por tanto, en el triángulo ABD:

$$x = \frac{\overline{AD} \cdot \operatorname{sen}(\beta - \gamma)}{\operatorname{sen}(90° + \gamma)} = \frac{77{,}53 \cdot \operatorname{sen} 20°}{\operatorname{sen} 150°} \approxeq 53{,}03$$

Es decir, la altura $\overline{AB}$ de la columna es, aproximadamente, 53,03 metros.