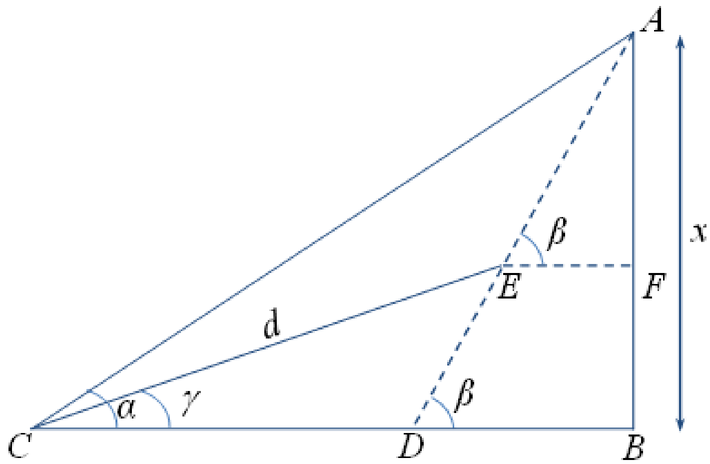
Usos de la trigonometría. Cálculo de alturas y distancias (V)
Altura de un punto de pie inaccesible desde un terreno inclinado sin obstáculos

Deseamos calcular la altura $\overline{AB} = x$ de un punto de pie inaccesible desde un terreno inclinado, tal y como se muestra en la figura.



Sea γ el ángulo de inclinación del terreno. Nos situamos en un punto C y calculamos el ángulo de elevación de A, que lo llamaremos α. Sobre el plano que contiene el triángulo ABC medimos la distancia $\overline{CE} = d$ y desde E volvemos a calcular el ángulo de elevación de A, que llamaremos β. El método a seguir consiste en calcular $\overline{AC}$ en el triángulo ACE y a partir de aquí calcular x en el triángulo ABC. Por un lado está claro que $\widehat{ACE} = \alpha - \gamma$, y por otro que $\widehat{CAE} = \beta - \alpha$. Esto último está menos claro. Veamos la demostración:

$$\widehat{CAE} = \widehat{CAB} - \widehat{DAB} = (90^\circ - \alpha) - (90^\circ - \beta) = \beta - \alpha$$

Obsérvese que con estos dos ángulos también se puede calcular el ángulo $\widehat{CAE}$:

$$\widehat{CEA} = 180^\circ - \widehat{ACE} - \widehat{CAE} = 180^\circ - (\alpha - \gamma) - (\beta - \alpha) = 180^\circ + \gamma - \beta$$

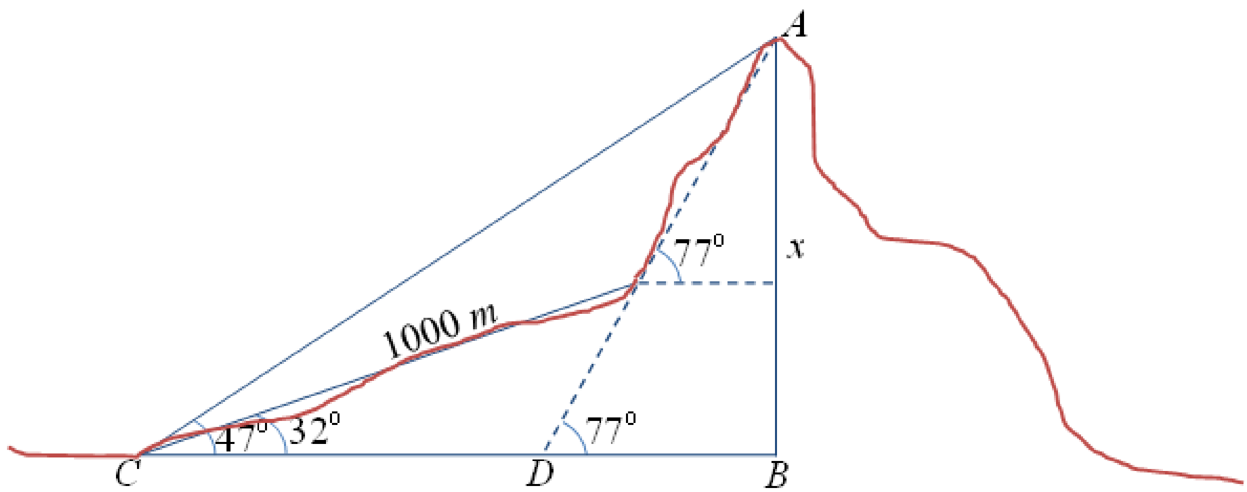
Ahora aplicamos el teorema de los senos en el triángulo ACE:

$$\frac{\overline{AC}}{\operatorname{sen}\widehat{CEA}} = \frac{d}{\operatorname{sen}\widehat{CAE}} \Rightarrow \overline{AC} = \frac{d \cdot \operatorname{sen}(180^\circ + \gamma - \beta)}{\operatorname{sen}(\beta - \alpha)}$$

Finalmente, en el triángulo ABC se tiene:

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{x}{\overline{AC}} \Rightarrow x = \overline{AC} \cdot \operatorname{sen}\alpha$$

Ejemplo.
El ángulo de elevación de una peña $\overline{AB}$ mide 47°. Después de caminar 1000 metros hacia ella, subiendo una pendiente inclinada 32°respecto de la horizontal, su ángulo de elevación es de 77°. Hallar la altura de la peña con respecto al plano horizontal de la primera observación.
Solución.



Llamemos $x = \overline{AB}$ a la altura de la peña. En este caso tenemos que $\alpha = 47°$, $\beta = 77°$, $\gamma = 32°$ y $d = 1000$. De los datos anteriores obtenemos los necesarios para aplicar la fórmula vista anteriormente: $\widehat{CAE} = \beta - \alpha = 77° - 47° = 30°$, $\widehat{CEA} = 180° + \gamma - \beta = 180° + 32° - 77° = 135°$.

$$\overline{AC} = \frac{d \cdot \text{sen}\,(180° + \gamma - \beta)}{\text{sen}\,(\beta - \alpha)} = \frac{1000 \cdot \text{sen}\ 135°}{\text{sen}\ 30°} \approxeq 1414{,}21$$

Por tanto:

$$x = \overline{AC} \cdot \text{sen}\ \alpha = \overline{AC} \cdot \text{sen}\ 47° \approxeq 1034{,}29$$

Es decir, la altura de la peña es de, aproximadamente, $1034,29$ metros.