Valor absoluto

Hasta aquí, y en tres documentos anteriores, hemos hecho un repaso del conjunto de los números reales. En primer lugar vimos cómo se introducen en la Educación Secundaria Obligatoria. Y posteriormente se recordó la importancia de percibir el conjunto de los números reales, con las operaciones suma y producto, y con la relación de orden $\leqslant$, como un conjunto dotado de una estructura: el *cuerpo ordenado conmutativo de los números reales*. Los documentos o artículos a los que nos referimos son los siguientes:

- Introducción al número real. Un paseo por el concepto de número en la Secundaria Obligatoria.
- El conjunto de los números reales tiene estructura de cuerpo.
- El conjunto de los números reales es un cuerpo ordenado conmutativo.

Pues bien, ahora es el momento de introducir de manera rigurosa el valor absoluto de un número real y de ver sus propiedades.
Concretamente, dado un número real a, se define su valor absoluto, $|a|$, de la siguiente forma:

$$|a| = \begin{cases} a & \text{si} \quad a \geqslant 0 \\ -a & \text{si} \quad a < 0 \end{cases}$$

Ya hemos hablado antes de la recta real y de cómo se representan los números reales sobre la misma. Nuestra intuición rápidamente nos da una idea clara de lo que significa la distancia entre dos números reales x e y. Si, por ejemplo, $x < y$, la distancia entre x e y será igual a $y - x$. Así pues la distancia entre los números -3 y 7 es $7 - (-3) = 10$. Pues bien, lo que se infiere de la definición de valor absoluto, es que el valor absoluto de un número real a es la distancia de ese número a al número 0, origen de la recta real.
Con un ejemplo numérico se verá mejor. Según la definición, como $-8 < 0$ su valor absoluto será $|-8| = -(-8) = 8$. Y 8 es precisamente la distancia de -8 al origen.

Vamos a obtener algunas propiedades básicas del valor absoluto, propiedades cuya demostración es sencilla utilizando la propia definición de valor absoluto, y las propiedades de cuerpo ordenado que tiene el conjunto de los números reales.

Propiedades del valor absoluto.

1. $|a| > 0\,,\ \forall\, a\ \in \mathbb{R}$.
2. Si $a\ \in \mathbb{R}$, entonces $|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$.
3. $a \leqslant |a|\,,\ \forall\, a\ \in \mathbb{R}$.
4. $|a| = |-a|\,,\ \forall\, a\ \in \mathbb{R}$.
5. $|ab| = |a||b|\,,\ \forall\, a,\ b\ \in \mathbb{R}$.
6. $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}\,,\ \forall\, a,\ b\ \in \mathbb{R}$.

Se podrá pensar que para qué demostrar las propiedades anteriores, cuando parecen evidentes por sí mismas, teniendo en cuenta la interpretación geométrica que le hemos dado al valor absoluto de un número real (recuérdese: la distancia de ese número al origen). De hecho, las vamos a comentar una por una desde esta perspectiva.

1. La distancia de un número al origen es siempre o cero o positiva.
2. Decir que la distancia de un número al origen es cero es equivalente a decir que ese número es el 0.
3. La distancia de un número al origen es siempre mayor o igual que ese número.
4. La distancia de un número al origen es igual que la distancia del opuesto de ese número al origen.
5. La distancia del producto de dos números al origen es igual que el producto de las distancias de esos dos números al origen.
6. La distancia del cociente de dos números al origen es igual que el cociente de las distancias de esos dos números al origen.

Sin embargo, tal y como hemos venido haciendo hasta ahora, vamos a demostrar las propiedades del valor absoluto de manera rigurosa.

Demostraciones de las propiedades del valor absoluto.

1. Por la propia definición de valor absoluto de un número real a:

$$|a| = \begin{cases} a & \text{si} \quad a \geqslant 0 \\ -a & \text{si} \quad a < 0 \Rightarrow -a \geqslant 0 \end{cases} ,$$

   es obvio que $|a| \geqslant 0$.

2. $\Rightarrow$) Supongamos que $|a| = 0$. Si fuera $a \geqslant 0$, entonces, por definición de valor absoluto, $|a| = a = 0$. Ahora bien si fuera $a < 0$, entonces $|a| = -a = 0 \Rightarrow a = 0$. En cualquier caso hemos demostrado que si $|a| = 0$, entonces $a = 0$.

   $\Leftarrow$) Si $a = 0$, entonces, por definición de valor absoluto, $|a| = a = 0$.

3. Distinguiremos tres casos: $a = 0$, $a > 0$ y $a < 0$.

   - Si $a = 0$, entonces $|a| = 0 \geqslant 0 = a$.
   - Si $a > 0$, entonces $|a| = a \geqslant a$.
   - Si $a < 0$, entonces $|a| = -a > 0 > a$.

4. Procederemos como en la propiedad anterior.

   - Si $a = 0$, entonces $|a| = |0| = 0 = -a = |-a|$.
   - Si $a > 0$, entonces $|a| = a = -(-a) = |-a|$, ya que $-a < 0$.
   - Si $a < 0$, entonces $|a| = -a = |-a|$, ya que $-a > 0$.

5. Para demostrar esta propiedad distinguiremos todos los casos posibles para los números reales de a y b

   - Si $a \neq 0$, $b = 0$, entonces $|ab| = |a0| = |0| = 0 = |a|0 = |a||0| = |a||b|$.
   - Si $a = 0$, $b \neq 0$, entonces $|ab| = |0b| = |0| = 0 = 0|b| = |0||b| = |a||b|$.
   - Si $a > 0$, $b > 0$, entonces $ab > 0 \Rightarrow |ab| = ab = |a||b|$.
   - Si $a < 0$, $b < 0$, entonces $ab > 0 \Rightarrow |ab| = ab = (-a)(-b) = |a||b|$.
   - Si $a > 0$, $b < 0$, entonces $ab < 0 \Rightarrow |ab| = -(ab) = a(-b) = |a||b|$.
   - Si $a < 0$, $b > 0$, entonces $ab < 0 \Rightarrow |ab| = -(ab) = (-a)b = |a||b|$.

6. Para demostrar esta propiedad se procederá de manera similar a como se ha hecho en la propiedad anterior.

- Si $a \neq 0$, $b = 0$, entonces $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \left|\dfrac{0}{b}\right| = |0| = 0 = \dfrac{|0|}{|b|} = \dfrac{|a|}{|b|}$.
- Si $a > 0$, $b > 0$, entonces $\dfrac{a}{b} > 0 \Rightarrow \left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{a}{b} = \dfrac{|a|}{|b|}$.
- Si $a < 0$, $b < 0$, entonces $\dfrac{a}{b} > 0 \Rightarrow \left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{a}{b} = \dfrac{-a}{-b} = \dfrac{|a|}{|b|}$.
- Si $a > 0$, $b < 0$, entonces $\dfrac{a}{b} < 0 \Rightarrow \left|\dfrac{a}{b}\right| = -\dfrac{a}{b} = \dfrac{a}{-b}\dfrac{|a|}{|b|}$.
- Si $a < 0$, $b > 0$, entonces $\dfrac{a}{b} < 0 \Rightarrow \left|\dfrac{a}{b}\right| = -\dfrac{a}{b} = \dfrac{-a}{b}\dfrac{|a|}{|b|}$.

Definición de distancia entre dos números reales.

Retomando la interpretación geométrica del valor absoluto tenemos que, dados dos números reales cualesquiera a y b, con $a < b$, entonces $b - a > 0$ y $a - b < 0$ y, por tanto,

$$|b - a| = b - a = -(a - b) = |a - b|$$

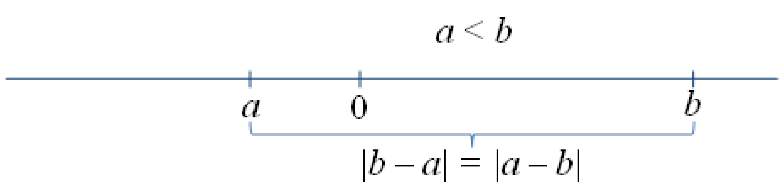
Si hubiera sido $a > b$, entonces $b - a < 0$ y $a - b > 0$, con lo que, en este caso,

$$|b - a| = -(b - a) = a - b = |a - b|$$

Finalmente, si $a = b$, es obvio que $|a - b| = |0| = |b - a|$.
Hemos demostrado pues que dados dos números reales cualesquiera a y b, se tiene que

$$|b - a| = |a - b|$$

Al número real $|b - a|$ se le suele llamar *distancia* entre a y b. Lo que hemos demostrado anteriormente es que la distancia entre a y b es la misma que la distancia entre b y a.



Obsérvese que, sin mencionarlo, cuando hemos hablado de distancia, se ha hecho referencia a la distancia mínima entre dos puntos, que es la longitud del segmento rectilíneo que los une. Evidentemente, distancias entre dos puntos a y b hay muchas más (se puede trazar una línea curva cualquiera para ir de a hasta b), pero para ello hay que pasar, al menos, a una segunda dimensión. Con el valor absoluto hacemos referencia a la idea intuitiva de distancia, que es la distancia mínima o distancia en línea recta.

Vamos a demostrar finalmente otras tres propiedades importantes del valor absoluto.

Proposición.

i) Si $a, b \in \mathbb{R}$, entonces $|a| \leqslant b \Leftrightarrow -b \leqslant a \leqslant b$.

ii) $|a+b| \leqslant |a| + |b|$, $\forall\, a, b \in \mathbb{R}$.

iii) $||a| - |b|| \leqslant |a-b|$, $\forall\, a, b \in \mathbb{R}$.

Demostración.

i) Supongamos que $|a| \leqslant b$. Entonces, usando las propiedades 3 y 4 anteriores, $a \leqslant |a| \leqslant b$ y también $-a \leqslant |-a| = |a| \leqslant b$, de donde $-b \leqslant a \leqslant b$.
Recíprocamente, si $-b \leqslant a \leqslant b$, puede ocurrir $a \geqslant 0$ y entonces $|a| = a \leqslant b$, o bien $a < 0$ y $|a| = -a \leqslant b$ porque $-b \leqslant a$, luego en cualquier caso $|a| \leqslant b$ como se quería demostrar.

ii) Es claro que $-|a| \leqslant a \leqslant |a|$ y $-|b| \leqslant b \leqslant |b|$ de donde $-(|a|+|b|) \leqslant a+b \leqslant |a|+|b|$, con lo que, aplicando la parte i) obtenemos $|a+b| \leqslant |a|+|b|$.

iii) En virtud de ii) tenemos:

$$|a| = |(a-b)+b| \leqslant |a-b| + |b| \Rightarrow |a| - |b| \leqslant |a-b|$$

$$|b| = |(b-a)+a| \leqslant |b-a| + |a| = |a-b| + |a| \Rightarrow -|a-b| \leqslant |a| - |b|$$

Entonces, otra vez por la parte i), queda finalmente que $||a| - |b|| \leqslant |a-b|$, tal y como queríamos demostrar.

La propiedad de la parte i) de la proposición anterior es muy útil para resolver algunas inecuaciones sencillas. Por ejemplo, para obtener los valores de x que cumplen la desigualdad $|x-4| \leqslant 2$, se procede de la siguiente manera:

$$|x-4| \leqslant 2 \Leftrightarrow -2 \leqslant x-4 \leqslant 2 \Leftrightarrow -2+4 \leqslant x-4+4 \leqslant 2+4 \Leftrightarrow 2 \leqslant x \leqslant 6$$

Por tanto la solución es el conjunto $\{x \in \mathbb{R} \,:\, 2 \leqslant x \leqslant 6\}$, o lo que es lo mismo, el intervalo cerrado $[2, 6]$.

Si lo que se desea es resolver la inecuación $|x-4| > 2$, se plantea justo la contraria, $|x-4| \leqslant 2$, que es la que hemos resuelto anteriormente. La solución será también la contraria de la solución anterior, es decir, $\mathbb{R} - [2, 6] = (-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$.