Introducción al número real
Un paseo por el concepto de número en la Secundaria Obligatoria

Mi profesor de geometría de primero de carrera insertaba citas al comienzo de las relaciones de ejercicios que nos entregaba de cada tema. Recuerdo perfectamente una de las primeras:

He de ser cruel para ser piadoso. El principio es malo, pero lo peor aún está por venir.
Hamlet, Shakespeare.

Con el tiempo descubrí que la cita no pretende desanimar, sino más bien al contrario, nos debe ayudar a afrontar la realidad y las dificultades con valentía y tenacidad. Y que a veces, en matemáticas, justamente en lo peor, es decir, en la dificultad, es donde se encuentra lo verdaderamente interesante.

Este artículo se ha pensado para que lo lea un alumno que comienza su andadura en el Bachillerato y que cursa la materia de matemáticas. Por supuesto que cualquier persona con una mínima competencia matemática también puede leerlo. Pretende ser una reflexión, más o menos amena, sobre lo que se debe de conocer acerca del concepto de número. Vamos allá.

En las matemáticas correspondientes a la etapa de la Educación Secundaria Obligatoria (entre los 12 y 16 años) se introduce el conjunto de los números reales extendiendo otros conjuntos de números. En primer lugar se define el conjunto de los números naturales, $\mathbb{N}$, como aquellos números que surgen de manera natural por la necesidad que siente el ser humano de contar lo que le rodea.

$$\mathbb{N} = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5, \ldots\}$$

Rápidamente el alumno identifica estos números pues los ha utilizado durante toda la Educación Primaria. Además, nota con facilidad que hay infinitos números naturales y que, entre dos números naturales consecutivos, no hay ningún otro número natural. Este es el momento de repasar también las nociones principales de divisibilidad entre números naturales: factor, divisor, número primo, máximo común divisor y mínimo común múltiplo, son los conceptos que se deben manejar con cierta agilidad en estos momentos (12, 13 años).
A continuación, por extensión de los naturales, se define el conjunto de los números enteros, $\mathbb{Z}$, añadiendo a los naturales sus correspondientes negativos y el número cero.

$$\mathbb{Z} = \{\ldots -5,\ -4,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5, \ldots\}$$

A partir de aquí es fácil definir el opuesto de un número entero a como el número $-a$. Así, el opuesto de 5 es -5 y el opuesto de -7 es $-(-7) = 7$. Además queda claro que al sumar un número con su opuesto ambos se anulan, es decir, el resultado es el número cero. Con estas ideas se empiezan a introducir el uso de paréntesis y corchetes, así como las reglas de los signos a la hora de realizar productos y divisiones de números enteros. Y empezando por operaciones básicas, el alumno, con algo de práctica, es capaz de realizar operaciones del tipo:

$$2-3\cdot[(-4)\cdot(-5)+(14-3)\cdot(-2)]\cdot[5-2\cdot(3-5)]$$

Para ello se insiste en ser cuidadosos con la jerarquía de las operaciones, de tal manera que lo primero es realizar las operaciones que se encuentran en el interior de un corchete o paréntesis, haciendo primero los productos y divisiones y finalmente las sumas y restas, siempre operando de izquierda a derecha. De este modo la operación anterior se puede reducir, paso a paso, así:

$$\begin{aligned} & 2-3\cdot[(-4)\cdot(-5)+(14-3)\cdot(-2)]\cdot[5-2\cdot(3-5)]= \\ = & \ 2-3\cdot[20+11\cdot(-2)]\cdot[5-2\cdot(-2)]= \\ = & \ 2-3\cdot(20-22)\cdot(5+4)= \\ = & \ 2-3\cdot(-2)\cdot 9= \\ = & \ 2+54= \\ = & \ 56 \end{aligned}$$

Es cierto que esto es tedioso, pero una práctica necesaria en el estudio diario de la materia de matemáticas a comienzos de la Educación Secundaria Obligatoria (12, 13 años). Para hacer más agradable la práctica de operaciones con números enteros, se intercalan problemas en el que se usan estos números y que conlleven la necesidad de hacer algunas operaciones aritméticas. Un par de enunciados de cierto nivel podrían ser los siguientes.

- *Obtener los números enteros entre* -8 *y* 0 *utilizando los números* 1, 2 *y* 3 *sin repetirlos, las operaciones aritméticas conocidas (suma, resta, producto, división) y el uso de paréntesis*.

- *Una prueba de selección consiste en responder a 100 preguntas de tipo test, de tal manera que se asignan 4 puntos si la respuesta es correcta, -1 punto si se deja en blanco y -3 puntos si la respuesta es incorrecta. Para superar la prueba es necesario obtener, al menos, 100 puntos. ¿Cuál es el mínimo de respuestas correctas necesarias para superar la prueba? ¿Y el máximo número de errores?*

Basta introducir en un buscador las palabras "problemas números enteros" para que aparezcan en la Web multitud de sitios con problemas que se pueden proponer para trabajar los números enteros y las operaciones entre los mismos. En particular, una actividad muy atractiva para el alumnado es experimentar con cuadrados mágicos.

El siguiente paso es extender los números enteros a las fracciones. El alumno entiende rápidamente la necesidad de tener que dividir un todo en partes iguales. Así, la fracción $\dfrac{3}{4}$ indica que hemos dividido un todo en cuatro partes, de las cuales hemos tomado tres. También es fácil identificar cada fracción con un número decimal (basta dividir el numerador entre el denominador). En el ejemplo anterior $\frac{3}{4} = 0{,}75$. En los últimos cursos de la Educación Secundaria Obligatoria (14, 15 años) el alumno también experimenta con fracciones cuya expresión decimal es infinita, es decir, con números decimales periódicos puros y periódicos mixtos. Esto último es bueno porque el alumno percibe la utilidad y el poder de las ecuaciones de primer grado, que ya conoce, y cómo con su uso efectivamente se puede demostrar que cada número periódico lleva asociada una fracción. Es gratificante obtener, por ejemplo, la fracción irreducible del número decimal periódico mixto $2,73333\ldots$ Se procede de la siguiente manera. Llamamos $x = 2,73333\ldots$ Ahora multiplicamos por diez: $10x = 27,3333\ldots$, y también por cien: $100x = 273,3333\ldots$ Finalmente, restando, se obtiene:

$$100x - 10x = 273,3333\ldots - 27,3333\ldots \Rightarrow 90x = 246 \Rightarrow x = \frac{246}{90} = \frac{41}{15}$$

El estudio de las fracciones lleva asociado el concepto de razón entre dos números y el concepto de proporción. Estos conceptos desembocan en el estudio de la proporcionalidad, tanto directa como inversa, los porcentajes y la proporcionalidad geométrica. Conceptos que tienen infinidad de aplicaciones a problemas cotidianos: reglas de tres directas e inversas, repartos proporcionales, aumentos y disminuciones porcentuales, interés simple, teorema de Tales, semejanza de triángulos, cálculo de distancias y de alturas, etcétera. De hecho, todo parte de que dos fracciones equivalentes forman una proporción, cumpliéndose la conocida propiedad

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow a \cdot d = b \cdot c$$

Con la idea anterior es fácil hacerse a la idea de que el conjunto formado por todas las fracciones equivalentes a una dada representa el mismo número, número que llamaremos racional (por aquello de que una fracción es una razón entre dos números). Y que podemos tomar como representante de este número racional a la fracción irreducible, es decir, a aquella cuyo numerador y denominador tienen un único divisor común: el uno. Vamos, aquella fracción que no se puede simplificar más.

Concretamente, el conjunto $\mathbb{Q}$ de los números racionales se define de la siguiente forma:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{n} \ : \ p \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\}$$

Ni que decir tiene que, al igual que ocurría con los números enteros, es necesario saber operar con fracciones. Veamos un ejemplo:

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) \cdot \frac{4}{3} - \frac{1}{12} + \frac{5}{4} \cdot \frac{8}{3} = \left(\frac{3}{6} + \frac{2}{6}\right) \cdot \frac{4}{3} - \frac{1}{12} + \frac{40}{12} =$$

$$= \frac{5}{6} \cdot \frac{4}{3} - \frac{1}{12} + \frac{10}{3} = \frac{20}{18} - \frac{1}{12} + \frac{10}{3} = \frac{10}{9} - \frac{1}{12} + \frac{10}{3} = \frac{40}{36} - \frac{3}{36} + \frac{120}{36} = \frac{157}{36}$$

Al mismo tiempo que se va adquiriendo agilidad en las operaciones con fracciones es conveniente presentar problemas donde éstas aparecen. Por tanto, tal y como se ha comentado antes y sin dejar de lado la parte puramente aritmética, es bueno trabajar con aplicaciones cotidianas de las fracciones, las reglas de tres, los repartos proporcionales, los porcentajes y las aplicaciones y uso de las fracciones en la geometría. De nuevo hay que insistir en que Internet es un recurso excepcional para obtener infinidad de problemas de este tipo. Basta introducir en un buscador las palabras adecuadas.
De hecho, entre los 12 y los 15 años, en clase de matemáticas no hacemos otra cosa, fundamentalmente, que trabajar con enteros y racionales. Durante estas edades, en la Educación Secundaria Obligatoria, el currículo de matemáticas se divide en cinco bloques: "Números y Álgebra", "Geometría", "Funciones y gráficas", "Estadística y probabilidad" y un bloque común para trabajar conjuntamente con los anteriores, "Planteamiento y resolución de problemas". A pesar de que es, efectivamente, en el bloque de "Números y álgebra" donde se dan a conocer y se llevan a cabo las primeras aplicaciones, es en el resto de bloques donde se pone de manifiesto su uso tanto desde el punto de vista geométrico como analítico. Además, el uso de números enteros y racionales a través de relaciones entre variables, tablas y gráficas, ofrece muchísimo juego a la hora de representar modelos matemáticos y de hacer estudios estadísticos, de evidente aplicación, por otro lado, en otras materias.
Hasta aquí todo va bien pues los naturales, enteros y racionales son números que se captan de manera intuitiva. Es a partir de los 14 o 15 años cuando se extiende la idea de número racional a la de número real. Normalmente se introducen diciendo que hay números que no son racionales porque su expresión decimal no es exacta ni periódica, es decir, tienen infinitas cifras decimales. Podemos poner rápidamente un ejemplo:

$$1,010011000111000011110000011111\ldots$$

¿Qué ocurre con este tipo de números? ¿Por qué no les corresponde, como a los racionales, una fracción? A veces se ponen otros ejemplos de números de este tipo, como el número pi, el número de oro o divina proporción, incluso el número e. El alumno admite a regañadientes que no sean racionales y se les pone nombre: irracionales. Pero a los 12 años el alumno ya conoce el concepto de raíz cuadrada y se da cuenta con facilidad de que la mayoría de las raíces cuadradas de los números naturales no son naturales, sino números decimales con muchas cifras decimales. No es una mala experiencia aproximar la raíz cuadrada de dos a un número con cuatro o cinco cifras decimales haciendo uso de la calculadora. Con algo de experimentación es fácil que el alumno llegue a elaborar una tabla como la siguiente:

$1^2 = 1$	$2^2 = 4$
$1{,}4^2 = 1{,}96$	$1,5^2 = 2{,}25$
$1{,}41^2 = 1{,}9881$	$1{,}42^2 = 2{,}0164$
$1{,}414^2 = 1{,}999396$	$1{,}415^2 = 2{,}002225$
$1{,}4142^2 = 1{,}99996164$	$1{,}4143^2 = 2{,}00024449$

Así se puede concluir que $\sqrt{2}$ es igual, aproximadamente y por defecto, a 1,4142. Incluso no estaría mal echar mano de un ordenador y una hoja de cálculo para calcular más cifras decimales de $\sqrt{2}$. De esta manera sí que el alumno admite, porque lo ve, que las raíces cuadradas de los números naturales que no sean cuadrados perfectos tienen una expresión decimal que no sigue ninguna pauta, ningún orden. En el último curso de la Educación Secundaria Obligatoria se puede demostrar (se debe, más bien) que la raíz cuadrada de dos es un número irracional, o sea, que no se puede poner en forma de fracción. Hagamos aquí la demostración. Para ello se han de tener en cuenta dos cosas.

- Toda fracción, si no es irreducible, admite una fracción equivalente que es irreducible. Recordemos que una fracción $\dfrac{m}{n}$ irreducible es aquella en la que $\operatorname{mcd}(m, n) = 1$.
- El cuadrado de todo número impar es siempre impar (¿te atreves a hacer una demostración?). Dicho de otra manera, si el cuadrado de un número es par, este número será también par (porque si fuera impar su cuadrado sería impar).

Para hacer la demostración de que $\sqrt{2}$ es irracional se procede por reducción al absurdo. Es decir, se supone que es racional y se llega a una contradicción, contradicción que confirmará que $\sqrt{2}$ no es racional.
Supongamos que $\sqrt{2}$ es racional, es decir que $\sqrt{2} = \dfrac{m}{n}$, donde m y n son números naturales y que la fracción $\dfrac{m}{n}$ es irreducible (se puede suponer irreducible porque si no lo fuera habría una equivalente que sí lo sería y podríamos tomar esta última como la fracción igual a la raíz cuadrada de dos). Ahora completemos el razonamiento:

$$\sqrt{2} = \frac{m}{n} \Rightarrow \sqrt{2}^2 = \left(\frac{m}{n}\right)^2 \Rightarrow 2 = \frac{m^2}{n^2} \Rightarrow m^2 = 2n^2$$

De lo anterior se deduce claramente que m^2 es par (el doble de cualquier número siempre es par), con lo que m también es par. Por tanto existe un número natural k tal que $m = 2k$. Sustituyendo tenemos:

$$(2k)^2 = 2n^2 \Rightarrow 4k^2 = 2n^2 \Rightarrow 2k^2 = n^2$$

De la misma forma que anteriormente, deducimos ahora que n^2 es par y que, por tanto, n también lo es. Hemos demostrado pues que m y n son ambos números pares, pero esto es una contradicción pues la fracción $\dfrac{m}{n}$ se ha tomado irreducible y, siendo tanto m como n número pares se podría reducir aún más (dividiendo entre dos).
La contradicción anterior demuestra que $\sqrt{2}$ no se puede poner en forma de fracción y que, por tanto, es un número irracional.

La unión de todos los números racionales y de todos los números irracionales es el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales. Conjunto que tiene estructura de cuerpo ordenado, pero de eso hablaremos en otro momento.

Bien, hemos llegado al final de este paseo por el concepto de número y sobre lo que deberías de saber de ellos. Pero el viaje no acaba aquí. Ahora llega el momento de descubrir otros muchos y variados aspectos de las matemáticas donde los números reales juegan el papel central. Por ejemplo:

- Trigonometría.
- Geometría plana. Vectores y rectas en el plano.
- Lugares geométricos. Cónicas.
- Números complejos.
- Logaritmos. Función exponencial y logarítmica.
- Límites y continuidad de funciones.
- Derivadas de funciones.
- Estadística unidimensional y bidimensional.
- Probabilidad.

Estas "cosas" o bien no se habían visto en la Educación Secundaria Obligatoria, o bien solamente se habían visto en parte. O sea, empiezan a ser "lo peor", según la sentencia de Hamlet. Ya veremos que no será para tanto. Más bien al contrario, intentaremos disfrutar con ellas.