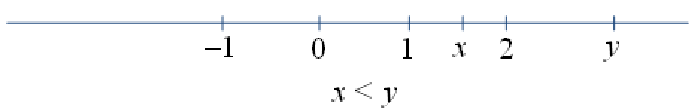
# El conjunto de los números reales es un cuerpo ordenado conmutativo

En un artículo anterior repasábamos la construcción del conjunto de los números reales, y en otro artículo posterior veíamos que dicho conjunto tiene estructura de cuerpo, el cuerpo conmutativo de los números reales. Ahora vamos a ver, además, que el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$, es un cuerpo ordenado. No solamente sabemos hacer sumas y productos con números, incluso operaciones combinadas con los mismos, sino que asumimos que el conjunto de los números reales está ordenado. Así, es costumbre visualizar el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales como el conjunto de puntos de una recta, *la recta real*. Elegido un punto de la recta como origen, que se corresponde con el número real 0 y tomando un punto a la derecha del origen, que se corresponde con el número real 1, puede establecerse una aplicación "uno a uno" de $\mathbb{R}$ sobre el conjunto de puntos de la recta (vamos, que a cada punto de la recta le corresponde un número real, y sólo uno). En esta recta real asumimos que un número $x$ es menor que otro $y$, $x < y$, si $x$ se encuentra a la izquierda de $y$. De esta forma, por ejemplo, los números negativos se sitúan a la izquierda del 0 y los números positivos a su derecha. De hecho, la recta real se usa como modelo geométrico de $\mathbb{R}$ que, desde un punto de vista intuitivo, nos será útil para visualizar los problemas (aunque matemáticamente esta visualización no se pueda admitir como demostración rigurosamente válida).




Sin embargo, al igual que ocurría con los axiomas de cuerpo, la estructura de orden en $\mathbb{R}$, a pesar de resultar ciertamente intuitiva, tal y como se ha comentado anteriormente, es producto de ciertos axiomas. Enunciaremos pues un tercer grupo de axiomas, además de los ya introducidos para las operaciones de suma y producto.
En $\mathbb{R}$ se tiene definida una relación binaria (esto significa que al utilizarla estamos relacionando dos elementos del conjunto,es decir, dos números reales), $\leqslant$, que verifica los siguientes axiomas:

1. Propiedad reflexiva: $a \leqslant a$, $\forall\, a \in \mathbb{R}$.

2. Propiedad antisimétrica: $a,\, b\, \in \mathbb{R}$, $a \leqslant b$ y $b \leqslant a \Rightarrow a = b$.

3. Propiedad transitiva: $a,\, b,\, c\, \in \mathbb{R}$, $a \leqslant b$ y $b \leqslant c \Rightarrow a \leqslant c$.

Los tres axiomas anteriores se resumen diciendo que la relación binaria $\leqslant$ es una relación de orden.

4. La relación de orden es total: dados $a,\, b\, \in \mathbb{R}$ se tiene $a \leqslant b$ o $b \leqslant a$.

Los dos siguientes axiomas ligan la relación de orden con la estructura de cuerpo.

5. Si se suma un mismo número real a los dos miembros de una desigualdad, la desigualdad se mantiene:
$$a,\, b\, \in \mathbb{R},\, a \leqslant b\, \Rightarrow a + c \leqslant b + c,\, \forall\, c \in \mathbb{R}$$

6. Si se multiplican los dos miembros de una desigualdad por un mismo número real mayor o igual que cero, la desigualdad se mantiene:
$$a,\, b,\, c\, \in \mathbb{R},\, a \leqslant b\, ,\, 0 \leqslant c\, \Rightarrow ac \leqslant bc$$

Un cuerpo en el que exista una relación binaria verificando los seis axiomas anteriores recibe el nombre de *cuerpo ordenado*. Estos axiomas junto con los axiomas relativos a las operaciones suma y producto, se resumen diciendo que $\mathbb{R}$ es un cuerpo ordenado conmutativo.
Se habrá notado que la relación binaria $\leqslant$ es la que traducimos por "menor o igual que". También son usuales las relaciones "menor que", "mayor o igual que" y "mayor que", que pasamos a describir a continuación.

- $a < b \Leftrightarrow a \leqslant b$ y $a \neq b$.
- $a \geqslant b \Leftrightarrow b \leqslant a$.
- $a > b \Leftrightarrow b < a$.

También se suelen utilizar las siguientes notaciones para ciertos subconjuntos de números reales:

- $\mathbb{R}^+ = \{a \in \mathbb{R} : 0 < a\}$.
- $\mathbb{R}_0^+ = \{a \in \mathbb{R} : 0 \leqslant a\}$.
- $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$.
- $\mathbb{R}^- = \{a \in \mathbb{R} : a < 0\}$.

Tanto en la Educación Secundaria Obligatoria como en el Bachillerato se suelen manejar con mucha frecuencia las desigualdades. Los siguientes ejercicios son precisamente esas propiedades y se pueden deducir con cierta facilidad de los axiomas anteriores.

**Ejercicios**.

Si $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, probar que:

1. $a \leqslant b \Leftrightarrow -b \leqslant -a$.
2. $a < b$ y $c \leqslant d \Rightarrow a + c < b + d$.
3. $a \leqslant b$ y $c \leqslant 0 \Rightarrow bc \leqslant ac$.
4. $a < b$ y $c > 0 \Rightarrow ac < bc$.
5. Pruébese que $aa > 0$, $\forall\, a \in \mathbb{R}^*$.
6. Probar que $0 < 1 < 1 + 1$.
7. Probar que $a \in \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow a^{-1} \in \mathbb{R}^+$.
8. Probar que $0 < a < b \Rightarrow 0 < b^{-1} < a^{-1}$.
9. Probar que $0 < a < b \ \ y \ \ 0 < c < d \ \Rightarrow \ ac < bd$.

Antes de dar las soluciones a los ejercicios anteriores, merece la pena comentar algunos de ellos. Una particularidad del ejercicio número 2 es que si se suma la misma cantidad a los dos miembros de una desigualdad, la desigualdad se mantiene ($a < b \ \Rightarrow a + c < b + c$). El ejercicio número 3 es esa conocida propiedad que dice que si multiplicamos los dos miembros de una desigualdad por un mismo número menor o igual que cero, la desigualdad cambia de sentido. El ejercicio número 5 expresa que el producto de un real distinto de cero consigo mismo siempre es positivo, o sea, aquello de que el cuadrado de un número no nulo es positivo. El ejercicio número 6 parece una tontería, pero si no supiéramos nada de los números reales, salvo estos axiomas de cuerpo ordenado conmutativo, se sugeriría que $\mathbb{R}$ tiene “muchos” elementos. El ejercicio número 7 dice que el inverso de un número real positivo es también positivo.

Por último, decir que hemos repasado las desigualdades y sus propiedades porque en las matemáticas de Bachillerato seguiremos usándolas con mucha frecuencia, y es bueno acostumbrarse a hacer un uso correcto de ellas. Además, también estudiaremos, no sin rigor, el valor absoluto de un número real y sus propiedades. Para manejar con agilidad el valor absoluto es muy conveniente manejar también adecuadamente las desigualdades.

**Soluciones a los ejercicios propuestos**.

1. $\Rightarrow$) Si $a \leqslant b \Rightarrow -a-b+a \leqslant -a-b+b \Rightarrow -b \leqslant -a$.

   $\Leftarrow$) Si $-b \leqslant -a$, por lo demostrado anteriormente, $-(-a) \leqslant -(-b) \Rightarrow a \leqslant b$.

2. Como $a < b \Rightarrow a \leqslant b$ y $a \neq b \Rightarrow a+c \leqslant b+c$. Y como $c \leqslant d$, entonces $b+c \leqslant b+d$. Utilizando la propiedad transitiva obtenemos $a+c \leqslant b+d$. Si fuera $a+c = b+d$, se tendría, usando las desigualdades anteriores, que $a+c \leqslant b+c$, por un lado, y $b+c \leqslant a+c$, por otro. Es decir, $a+c = b+c \Rightarrow a = b$. Pero esto contradice que $a \neq b$, así pues la desigualdad es estricta: $a+c < b+d$.

3. Como $c \leqslant 0$, por el ejercicio 1, $0 \leqslant -c$. Por tanto, por el axioma 6, $a(-c) \leqslant b(-c)$, o sea, $-(ac) \leqslant -(bc)$, y de aquí, $-(ac)+bc+ac \leqslant -(bc)+bc+ac$, es decir, $bc \leqslant ac$, tal y como queríamos demostrar.

4. Si $a < b$ y $c > 0$, entonces $a \leqslant b$ y $a \neq b$; $c \geqslant 0$ y $c \neq 0$. Utilizando el axioma número 6, se tiene que $ac \leqslant bc$. Ahora bien, si fuera $ac = bc$, entonces, por ser $c \neq 0$, $acc^{-1} = bcc^{-1}$, o sea $a = b$. Pero esto contradice que $a \neq b$. Por tanto la desigualdad es estricta: $ac < bc$.

5. Utilizaremos el ejercicio anterior considerando dos casos, que $a > 0$, y que $a < 0$:

   i) Si $a > 0 \Rightarrow aa > 0a \Rightarrow aa > 0$.

   ii) Si $a < 0 \Rightarrow -a > 0 \Rightarrow (-a)(-a) > 0(-a) \Rightarrow aa > 0$.

6. Supongamos que $0 > 1$. Entonces $-1 > 0$ y, por tanto, $(-1)(-1) > 0(-1) \Rightarrow 1 > 0$, lo que contradice que $0 > 1$. Así pues hemos demostrado que $0 < 1$.
   Supongamos ahora que $1 > 1+1$. Entonces $1+(-1) > 1+1+(-1) \Rightarrow 0 > 1$, que contradice lo demostrado anteriormente. Por tanto $1 < 1+1$.

7. $\Rightarrow$) Supongamos que $a^{-1} \notin \mathbb{R}^+$. Entonces $a^{-1} < 0$ (la desigualdad es estricta porque el cero no tiene inverso), es decir, $-a^{-1} > 0$ y como $a > 0$, $-a^{-1}a > 0 \Rightarrow -1 > 0 \Rightarrow 0 > 1$, que es una contradicción. Entonces $a^{-1} \in \mathbb{R}^+$.

   $\Leftarrow$) Supongamos que $a \notin \mathbb{R}^+$. Entonces $a < 0 \Rightarrow -a > 0$, y como $a^{-1} > 0$ se tiene que $-aa^{-1} > 0 \Rightarrow -1 > 0 \Rightarrow 0 > 1$, que es de nuevo una contradicción. Así pues $a \in \mathbb{R}^+$.

8. Como $a$, $b > 0$, entonces, por el ejercicio anterior, $a^{-1}$, $b^{-1} > 0$.
   Por tanto $0 < a < b \Rightarrow a^{-1}b^{-1}0 < a^{-1}b^{-1}a < a^{-1}b^{-1}b \Rightarrow 0 < b^{-1} < a^{-1}$.

9. Como $c > 0$, entonces $ac < bc$. De la misma forma, como $b > 0$, entonces $bc < bd$. Por la propiedad transitiva $ac < bd$.

Finalmente recordaremos la nomenclatura que se usa para designar los intervalos y semirrectas de la recta real.

- *Intervalo abierto*: $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$. Son los números reales comprendidos entre $a$ y $b$, no incluyéndose los extremos $a$ y $b$.


- *Intervalo cerrado*: $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x \leqslant b\}$. Son los números reales comprendidos entre $a$ y $b$, incluidos los extremos $a$ y $b$.


- *Intervalo abierto por la izquierda y cerrado por la derecha*: $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leqslant b\}$. Son los números reales comprendidos entre $a$ y $b$, incluido $b$, pero no incluido $a$.


- *Intervalo cerrado por la izquierda y abierto por la derecha*: $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x < b\}$. Son los números reales comprendidos entre $a$ y $b$, incluido $a$, pero no incluido $b$.


- *Semirrecta abierta por la derecha*: $(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} : x < a\}$. Son los números reales menores estrictamente que $a$, es decir, $a$ no se incluye.


- *Semirrecta cerrada por la derecha*: $(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} : x \leqslant a\}$. Son los números reales menores o iguales que $a$, es decir, se incluye el propio $a$.


- *Semirrecta abierta por la izquierda*: $(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : a < x\}$. Son los números reales mayores estrictamente que $a$, es decir, $a$ no se incluye.


- *Semirrecta cerrada por la izquierda*: $(a, +\infty] = \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x\}$. Son los números reales mayores o iguales que $a$, es decir, se incluye el propio $a$.