El conjunto de los números reales tiene estructura de cuerpo

En un artículo anterior se hablaba del conjunto de los números reales como unión de los racionales y los irracionales, y de cómo se introducía en la Educación Secundaria Obligatoria. De manera natural se habían introducido los naturales $\mathbb{N}$, y se habían extendido a los enteros $\mathbb{Z}$ y a los racionales $\mathbb{Q}$. El conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales contiene a todos ellos y a los irracionales.

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

Pero poco se habla de la estructura del conjunto de los números reales. A un nivel de Bachillerato es importante que se sepa que el conjunto de los números reales tiene estructura de cuerpo ordenado. Pero... ¿qué significa esto? De manera rápida y simple significa que las dos operaciones definidas en $\mathbb{R}$, suma y producto, cumplen una serie de propiedades. Propiedades que les daremos el nombre de axiomas, pues se verificarán siempre de manera evidente y las daremos por ciertas sin que medie ninguna demostración. Vamos a concretar un poco más.

En el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales, hay definida una operación, llamada *suma* y denotada con el signo $+$, que verifica los siguientes axiomas:

1. La suma es asociativa: $(a+b)+c = a+(b+c)$, $\forall\, a,\, b,\, c\ \in \mathbb{R}$.

2. La suma es conmutativa: $a+b = b+a$, $\forall\, a,\, b, \in \mathbb{R}$.

3. Existe un elemento neutro para la suma, que lo designaremos por 0:

$$\exists\, 0 \in \mathbb{R}\ :\ a+0 = a,\ \forall\, a\ \in \mathbb{R}$$

4. Todo número real a admite un simétrico para la suma, que llamaremos *opuesto* de a y lo designaremos por $-a$:

$$\forall\, a\ \in \mathbb{R},\ \exists\, -a\ \in \mathbb{R}\ :\ a+(-a) = 0$$

Los cuatro axiomas anteriores se resumen diciendo que $\mathbb{R}$, con la operación suma, es un grupo conmutativo, el *grupo aditivo del los números reales*. En este grupo el elemento neutro es único y el opuesto de cada número real a también es único. ¿Os imagináis que hubiera dos ceros en vez de uno? ¿No se os había ocurrido que esto pudiera suceder? Pues, efectivamente, no puede ser. Y lo podemos demostrar. Ya te suena del artículo anterior la demostración por reducción al absurdo. Si hubiera dos elementos neutros distintos tendríamos que, además del 0 del axioma número 3, habría otro neutro. Lo podemos designar por $0'$, tal que $0' \neq 0$. Por ser 0 neutro se tendría que $0'+0 = 0'$ y por ser igualmente $0'$ también neutro tendríamos que $0+0' = 0$ (axioma número 3).

Como la suma es conmutativa (axioma número 2), tenemos que $0' + 0 = 0 + 0'$, es decir $0' = 0$, pero esto es una contradicción pues habíamos supuesto que 0 y $0'$ eran distintos. Así pues, no puede haber dos neutros, con lo que nuestro elemento neutro, el conocido 0, es único.
No haremos la demostración aquí, pero no es difícil demostrar que el opuesto de un número real a, al que hemos designado por $-a$, también es único. Se hace de manera parecida. Si a tuviera dos opuestos llegaríamos a una contradicción. ¿Te atreves a intentarlo?
En nuestro grupo aditivo recién definido es costumbre escribir $a - b$ en lugar de $a + (-b)$. De aquí que la operación resta no sea distinta de la suma. En realidad $a - b$ consiste en sumarle al número a el opuesto de b.

Veamos ahora unos cuantos axiomas más.

En $\mathbb{R}$ hay definida una segunda operación, llamada *producto* y denotada bien con un punto, $\cdot$, bien por yuxtaposición, que verifica los siguientes axiomas:

5. El producto es asociativo: $(ab)c = a(bc)$, $\forall\, a,\, b,\, c\, \in \mathbb{R}$.

6. El producto es conmutativo: $ab = ba$, $\forall\, a,\, b, \in \mathbb{R}$.

7. Existe un número real no nulo, que designaremos por 1, que es elemento neutro para el producto:
$$\exists\, 1 \in \mathbb{R},\, 1 \neq 0 \,:\, a1 = a,\, \forall\, a\, \in \mathbb{R}$$

8. Todo número real a distinto de cero admite un simétrico para el producto, que llamaremos *inverso* de a y lo designaremos por a^{-1}:
$$\forall\, a\, \in \mathbb{R} - \{0\},\, \exists\, a^{-1}\, \in \mathbb{R} \,:\, aa^{-1} = 1$$

9. El producto cumple la propiedad distributiva respecto de la suma:
$$a(b + c) = ab + ac,\, \forall\, a,\, b,\, c\, \in \mathbb{R}$$

El producto es la operación a la que habitualmente llamamos también multiplicación. Es muy habitual utilizar, sobre todo en la Secundaria Obligatoria, un punto para denotarla. Así, es equivalente escribir $3 \cdot (7 - 5)$ que $3(7 - 5)$. Sin embargo es obvio que si queremos designar el producto de dos números concretos, no arbitrarios, tengamos que utilizar el punto, es decir, el producto de 3 por 2 se denota $3 \cdot 2$ para no confundirlo con el número treinta y dos: 32.
Al igual que ocurría con el neutro para la suma, el 0, es fácil demostrar que el elemento neutro para el producto, el 1 que aparece en el axioma 7, es también único. Igualmente, el inverso a^{-1} de

un número real a distinto de cero, también es único. Al inverso de un número real a, no solamente se le denota por a^{-1}, sino que también podremos escribir $\frac{1}{a}$. Además, si $a \in \mathbb{R}$ y $b \in \mathbb{R} - \{0\}$ podremos escribir $\frac{a}{b}$ en lugar de ab^{-1}. De aquí se deduce que la división no es una operación realmente distinta del producto. Es decir, dividir el número a entre el número b no es otra cosa que el producto de a por el inverso b:

$$ab^{-1} = a\frac{1}{b} = \frac{a}{b}$$

Los nueve axiomas anteriores se resumen diciendo que $\mathbb{R}$, con las operaciones suma y producto, tiene estructura de cuerpo conmutativo, *el cuerpo de los números reales*.

Al comenzar el Bachillerato se hace un repaso del número real y es posible que no se mencione su estructura, ni siquiera que se enumeren explícitamente los axiomas anteriores. Pero es importante saber que están ahí, y que las propiedades de la suma y el producto de números reales, se deducen de ellos. De hecho, en las soluciones a los ejercicios que se proponen a continuación, podrás observar que la demostración de cada una de las propiedades usa únicamente los axiomas expuestos, o alguna propiedad demostrada con anterioridad. Es cierto que todo esto puede causar sorpresa, sobre todo porque después de tantos años acostumbrados a realizar operaciones combinadas con sumas y productos, tengamos que admitir que hay propiedades "no demostrables" (los axiomas) y otras que se deducen de estos. La estructura de cuerpo conmutativo que tiene el conjunto de los números reales es importante por sus propiedades. En Matemáticas, no importa tanto lo que sea un número real como las propiedades que tiene el conjunto de los números reales.

Ejercicios.

1. Probar la siguiente afirmación: $-(a-b) = b-a, \forall\, a,\, b, \in \mathbb{R}$.

2. Demostrar la propiedad cancelativa: $a,\, b,\, c\, \in \mathbb{R}$, $a+b = b+c \Rightarrow a = c$.

3. Probar que $a0 = 0, \forall\, a\, \in \mathbb{R}$, y deducir que 0 no tiene inverso.

4. Pruébese que si $a,\, b\, \in \mathbb{R}$ y $ab = 0$, entonces $a = 0$ o $b = 0$. Dedúzcase que $\mathbb{R} - \{0\}$ es un grupo conmutativo para el producto.

5. Dados $a,\, b,\, c,\, d\, \in \mathbb{R}$ con $b \neq 0$ y $d \neq 0$, pruébese que $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$ y que $\frac{a}{b}\frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$.

6. Comprueba las dos afirmaciones siguientes:

   a) $(-a)b = a(-b) = -(ab), \forall\, a,\, b, \in \mathbb{R}$.

   b) $(-a)(-b) = ab, \forall\, a,\, b, \in \mathbb{R}$.

Soluciones.

1. Utilizando que la suma es asociativa tenemos que

$$(a-b)+(b-a)=a+(-b+b)-a=a+(-a)=0$$

Por tanto, el opuesto de $a-b$ es $b-a$, es decir, $-(a-b)=b-a$.

2. $a+b=b+c \Rightarrow (a+b)+(-b)=(b+c)+(-b) \Rightarrow a+(b+(-b))=c+(b+(-b)) \Rightarrow$
$\Rightarrow a+0=c+0 \Rightarrow a=c$.

3. $a0+a0=a(0+0)=a0=a0+0$. Entonces, por el ejercicio anterior, $a0=0$.
Si 0 tuviese inverso, 0^{-1}, entonces $0^{-1}0=1$ y esto contradice lo anterior.

4. Si fuera $b\neq 0$, entonces $a=a1=abb^{-1}=0b^{-1}=0$.
De igual forma, si $a\neq 0$, entonces $b=1b=a^{-1}ab=a^{-1}0=0$.
Para deducir que $\mathbb{R}-0$ es un grupo conmutativo para el producto, basta observar que las propiedades asociativa, conmutativa y existencia de elemento neutro, son claras por los axiomas 5, 6 y 7. Además, el axioma 8 dice que $\forall\, a\ \in\mathbb{R}-\{0\},\ \exists\, a^{-1}\ \in\mathbb{R}\ :\ aa^{-1}=1$. Este número a^{-1} es distinto de cero pues al ser $1\neq 0$, si fuera $a^{-1}=0$, entonces $aa^{-1}=0$, en contradicción con el propio axioma 8.

5. $\dfrac{a}{b}+\dfrac{c}{d}=\dfrac{ad+bc}{bd}=ab^{-1}+cd^{-1}=ab^{-1}(dd^{-1})+cd^{-1}(dd^{-1})=(ad+bc)b^{-1}d^{-1}=$
$=(ad+bc)(bd)^{-1}=\dfrac{ad+bc}{bd}$.

$\dfrac{a}{b}\dfrac{c}{d}=ab^{-1}cd^{-1}=(ac)(b^{-1}d^{-1})=(ac)(bd)^{-1}=\dfrac{ac}{bd}$.

6. a) $ab+(-a)b=(a+(-a))\,b=0b=0 \Rightarrow -(ab)=(-a)b$.
$ab+a(-b)=a\,(b+(-b))=a0=0 \Rightarrow -(ab)=a(-b)$.

   b) $(-a)(-b)+(-(ab))=(-a)(-b)+(-a)b=(-a)(-b+b)=(-a)0=0 \Rightarrow$
$\Rightarrow -((-a)(-b))=-(ab) \Rightarrow (-a)(-b)=ab$.

En un artículo posterior hablaremos del orden en el conjunto de los números reales.