Problema 1

Dado un número primo p demostrar que $2^p + 3^p$ no puede ser un cuadrado perfecto.

Solución

Si $p = 2$, entonces $2^p + 3^p = 2^2 + 3^2 = 4 + 9 = 13$, que no es un cuadrado perfecto. Por tanto, p será a partir de ahora un número primo distinto de 2.
Razonemos por reducción al absurdo y supongamos que $\exists\, k \in \mathbb{N}$ tal que $2^p + 3^p = k^2$.
Desarrollemos la expresión $2^p + 3^p$ de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
2^p + 3^p &= 2^p + (2+1)^p = \\
&= 2^p + 2^p + p \cdot 2^{p-1} + \binom{p}{2} 2^{p-2} + \binom{p}{3} 2^{p-3} + \ldots + \binom{p}{p-2} p^2 \cdot 2^2 + p \cdot 2 + 1 = \\
&= 2 \left(2^p + p \cdot 2^{p-2} + \binom{p}{2} 2^{p-3} + \binom{p}{3} 2^{p-4} + \ldots + \binom{p}{p-2} p \cdot 2 + p \right) + 1
\end{aligned}$$

De aquí se deduce que $2^p + 3^p$ es impar. Esto implica que k debe ser también impar, pues en caso contrario $k^2 = 2^p + 3^p$ sería par (el cuadrado de un número par es par). Por tanto $k = 2r + 1$ para algún $r \in \mathbb{N}$. De este modo tenemos:

$$\begin{aligned}
2 \left(2^p + p \cdot 2^{p-2} + \binom{p}{2} 2^{p-3} + \binom{p}{3} 2^{p-4} + \ldots + \binom{p}{p-2} p \cdot 2 + p \right) + 1 &= (2r+1)^2 \Rightarrow \\
\Rightarrow 2 \left(2^p + p \cdot 2^{p-2} + \binom{p}{2} 2^{p-3} + \binom{p}{3} 2^{p-4} + \ldots + \binom{p}{p-2} p \cdot 2 + p \right) + 1 &= 4r^2 + 4r + 1 \Rightarrow \\
\Rightarrow 2 \left(2^p + p \cdot 2^{p-2} + \binom{p}{2} 2^{p-3} + \binom{p}{3} 2^{p-4} + \ldots + \binom{p}{p-2} p \cdot 2 + p \right) &= 4r^2 + 4r \Rightarrow \\
\Rightarrow 2^p + p \cdot 2^{p-2} + \binom{p}{2} 2^{p-3} + \binom{p}{3} 2^{p-4} + \ldots + \binom{p}{p-2} p \cdot 2 + p &= 2r^2 + 2r \quad (*)
\end{aligned}$$

Como p es primo y $p \neq 2$, p debe ser impar. Es decir $\exists\, t \in \mathbb{N}$ tal que $p = 2t + 1$. Entonces la expresión $(*)$ queda del siguiente modo:

$$2^p + p \cdot 2^{p-2} + \binom{p}{2} 2^{p-3} + \binom{p}{3} 2^{p-4} + \ldots + \binom{p}{p-2} p \cdot 2 + 2t + 1 = 2r^2 + 2r \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2 \left(2^{p-1} + p \cdot 2^{p-3} + \binom{p}{2} 2^{p-4} + \binom{p}{3} 2^{p-5} + \ldots + \binom{p}{p-2} p + t \right) + 1 = 2 \left(r^2 + r \right)$$

Como se aprecia claramente, el primer miembro es impar y el segundo par. Y esto es una contradicción.
Por tanto no existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $2^p + 3^p = k^2$, es decir, $2^p + 3^p$ no puede ser un cuadrado perfecto.

Problema 2

Dado un número natural n demostrar que $14^n + 11$ nunca es un número primo.

Solución

No es muy difícil darse cuenta de que si n es impar, entonces 14^n acaba en 4. Esto significa que $14^n + 11$ acabará en 5 y, por tanto, no puede ser un número primo.

Por otro lado, si n es par, 14^n acabará en 6 y $14^n + 11$ acabará en 7. Vamos a intentar demostrar, en este caso, que $14^n + 11$ es un múltiplo de 3. Para ello bastará demostrar que $14^n + 2$ es múltiplo de 3. Es decir, estamos afirmando que si $14^n + 2$ es múltiplo de 3, también lo será $14^n + 11$ (esto es muy sencillo de ver porque la suma de dos múltiplos de 3 también es un múltiplo de 3, y si a $14^n + 2$, que es múltiplo de 3, le sumamos 9, que también lo es, se obtiene $14^n + 11$).

Razonemos por reducción al absurdo y supongamos que $14^n + 2$ no es un múltiplo de 3. Entonces, al dividir $14^n + 2$ entre 3 solamente pueden ocurrir dos cosas: que el resto de la división sea 1, o bien que el resto de la división sea 2.

- Si el resto es 1, entonces $14^n + 2 = 3c + 1$, donde c es el cociente que resulta de dividir $14^n + 2$ entre 3. Es decir, $14^n + 1 = 3c$. Pero esto no es cierto si n es cualquier número par. Por ejemplo, ya para $n = 2$, $14^n + 1 = 14^2 + 1 = 197$, que no es un múltiplo de 3. También ocurre para $n = 4$: $14^n + 1 = 14^4 + 1 = 38417$, que tampoco es múltiplo de 3.

- Si el resto es 2, entonces $14^n + 2 = 3c + 2$, donde, otra vez, c es el cociente que resulta de dividir $14^n + 2$ entre 3. Es decir, $14^n = 3c$. Y esto tampoco es cierto si n es cualquier número par. Para $n = 2$, $14^n = 14^2 = 196$, que no es múltiplo de 3. También ocurre para $n = 4$, $14^n = 14^4 = 38416$, que tampoco es múltiplo de 3.

En cualquiera de los dos casos llegamos a una contradicción. Esto quiere decir que, si n es par, $14^n + 2$ es un múltiplo de 3, con lo que también lo será $14^n + 11$.

Hemos demostrado pues que en ningún caso $14^n + 11$ puede ser un número primo.