Pruebas de Acceso a Enseñanzas Universitarias Oficiales de Grado (PAEG)
Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales II - Septiembre 2012 - Propuesta B

1. a) Despeja la matriz X en la siguiente ecuación matricial: $2 \cdot I + 3 \cdot X + X \cdot A = B$, suponiendo que todas las matrices son cuadradas del mismo orden (I es la matriz identidad).

   b) Si $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$, calcula la matriz X que cumple $A \cdot X = I$, donde I es la matriz identidad de orden 2.

Solución:

a)

$$\begin{array}{rcl} & & 2 \cdot I + 3 \cdot X + X \cdot A = B \\ (1) & \Leftrightarrow & X(3I) + XA = B - 2I \\ (2) & \Leftrightarrow & X(3I + A) = B - 2I \\ (3) & \Leftrightarrow & X(3I + A)(3I + A)^{-1} = (B - 2I)(3I + A)^{-1} \\ (4) & \Leftrightarrow & XI = (B - 2I)(3I + A)^{-1} \\ (5) & \Leftrightarrow & X = (B - 2I)(3I + A)^{-1} \end{array}$$

Observaciones:

- En el paso (1) restamos $2I$ a los dos miembros de la igualdad. Además escribiremos $3 \cdot X$ de la forma $X(3I)$ ¿Por qué se hace esto último? Lo veremos a continuación.
- En el paso (2) sacamos X factor común de la expresión $X(3I) + XA$ (el factor común X se extrae a la izquierda pues a la izquierda está en los dos sumandos anteriores. Una vez extraído factor común se tiene $X(3I + A)$. Ahora adquiere sentido el hecho de haber escrito $3 \cdot X$ de la forma $X(3I)$ ya que así, una vez extraído el factor común, podremos realizar la suma $3I + A$. Si no lo hubiéramos hecho así, al sacar factor común, nos quedaría la expresión $3 + A$, expresión que no tiene sentido pues no se puede sumar un número con una matriz cuadrada de orden mayor o igual que dos. Como ves, en realidad, en el ambiente matricial, si k es un número real, entonces $kA = (kI)A = A(kI)$.
- En el paso (3) multiplicamos por la inversa de $3I + A$ a la derecha de los dos miembros de la igualdad. Lo hacemos por la derecha porque $3I + A$ está multiplicando a X también por la derecha. Lo que no se puede hacer es multiplicar por la inversa por la izquierda en un miembro y por la derecha en otro (o viceversa). Recuérdese que el producto de matrices no es conmutativo.
- En el paso (4) hemos utilizado que el producto de una matriz cuadrada por su inversa es la matriz identidad. En este caso sí que es cierta la conmutatividad del producto de matrices: $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$

- En el paso (5) se ha utilizado que $I \cdot X = X \cdot I = X$ donde I es la matriz identidad. Digamos que la matriz identidad "juega el mismo papel" en el conjunto de las matrices cuadradas, que el número 1 en el conjunto de los números reales (ambos son el elemento neutro de la multiplicación).

b) Sea $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Entonces:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Multiplicando las matrices del primer miembro de la igualdad anterior:

$$\begin{pmatrix} 2a & 2b \\ 5a+3c & 5b+3d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Y de aquí se obtiene:

$$\begin{cases} 2a = 1 \\ 5a + 3c = 0 \\ 2b = 0 \\ 5b + 3d = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ c = -\frac{5}{6} \\ b = 0 \\ d = \frac{1}{3} \end{cases}$$

Entonces:

$$X = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{5}{6} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

2. Una compañía de autobuses oferta viajes a tres destinos diferentes: Roma, París y Lisboa. La compañía dispone de 30 autobuses. El número de autobuses que van a París es el doble de la suma de los que van a Roma y a Lisboa. Y el número de autobuses que van a Lisboa es la cuarta parte del número total de autobuses que van a Roma y a París.

   a) Plantea el correspondiente sistema de ecuaciones que permita obtener el número de autobuses que van a Roma, París y Lisboa respectivamente.

   b) Resuelve el sistema planteado en el apartado anterior.

   Solución:

   a) Llamemos x al número de autobuses que van a Roma, y al número de autobuses que van a París, y z al número de de autobuses que van a Lisboa. Entonces el enunciado del problema se puede plantear según el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x+y+z=30 \\ y=2(x+z) \\ z=\dfrac{x+y}{4} \end{cases}$$

   b) Operando se puede escribir el sistema anterior de la siguiente forma:

$$\begin{cases} x+y+z=30 \\ 2x-y+2z=0 \\ x+y-4z=0 \end{cases}$$

   Este sistema, en forma matricial, toma la forma:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 30 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

   Aplicando el método de Gauss:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 30 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -4 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ f_2-2f_1 \\ f_3-f_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 30 \\ 0 & -3 & 0 & -60 \\ 0 & 0 & -5 & -30 \end{pmatrix}$$

   Entre las matrices se especifican las operaciones realizadas, donde f_1, f_2 y f_3 son abreviaturas de fila 1, fila 2 y fila 3, respectivamente. El objetivo es obtener dos ceros por debajo del elemento a_{11} de la matriz, y un cero por debajo del elemento a_{22}. De este modo se obtendrá un sistema asociado de tipo escalonado (aquel que tiene todo ceros bajo la diagonal principal). Estos sistemas son muy fáciles de resolver.

Obsérvese que, con las operaciones realizadas, el método ha finalizado pues ya hemos conseguido que todos los elementos de la matriz bajo la diagonal principal sean cero. El sistema asociado a esta última matriz es:

$$\begin{cases} x + y + z = 30 \\ -3y = -60 \\ -5z = -30 \end{cases}$$

De aquí es fácil despejar las tres incógnitas:

$$z = 6 \quad y = 20 \quad x = 4$$

Por tanto hay 4 autobuses que van a Roma, 20 que van a París, y 6 que van a Lisboa.

3. Dada la función $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + ax^2 + bx + c$, calcula los valores de las constantes a, b y c para que la gráfica de la función pase por el punto $(0, -6)$, tenga un máximo relativo en el punto de abscisa $x = -1$, y un punto de inflexión en $x = 1$. **Solución:**

   Como la función pasa por el punto $(0, -6)$, tenemos que:

$$f(0) = -6 \Leftrightarrow \frac{1}{3} \cdot 0^3 + a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = -6 \Leftrightarrow c = -6$$

   La derivada de la función f es $f'(x) = x^2 + 2ax + b$. Como la función tiene un máximo relativo en el punto de abscisa $x = -1$, se tiene que:

$$f'(-1) = 0 \Leftrightarrow (-1)^2 + 2a(-1) + b = 0 \Leftrightarrow -2a + b = -1$$

   La derivada segunda de la función f es $f''(x) = 2x + 2a$. Como la función tiene un punto de inflexión en $x = 1$, entonces:

$$f''(1) = 0 \Leftrightarrow 2 + 2a = 0 \Leftrightarrow 2a = -2 \Leftrightarrow a = -1$$

   Sustituyendo en la igualdad anterior:

$$-2a + b = -1 \Leftrightarrow -2 \cdot (-1) + b = -1 \Leftrightarrow 2 + b = -1 \Leftrightarrow b = -3$$

4. Se considera la función $f(x) = \begin{cases} (x+3)^2 & \text{si} \quad x \leqslant 0 \\ |2x^3-2|-3 & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$. Se pide:

   a) Estudia su continuidad en $x = 0$.

   b) Extremos relativos en el intervalo $(-6,\ 0)$.

   c) Intervalos de crecimiento y decrecimiento en $(-\infty,\ 0)$.

Solución:

a) Estudiemos los límites laterales cuando $x \to 0$:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} (x+3)^2 = 9$$
$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \left(|2x^3-2|-3\right) = -1$$

Como lo límites laterales son distintos, no existe el límite de la función cuando $x \to 0$. Por tanto f no es continua en $x = 0$. Además, como ambos son finitos, se dice que existe una discontinuidad de salto finito en $x = 0$.

b) La restricción de la función f al intervalo $(-6,\ 0)$ es la función $g(x) = (x+3)^2$. Por tanto, los extremos relativos de f en el intervalo $(-6,\ 0)$ son los mismo que los de la función g en el mismo intervalo. Derivando g e igualando a cero:

$$g'(x) = 2(x+3) = 0 \Leftrightarrow x+3 = 0 \Leftrightarrow x = -3$$

Por tanto $x = -3$ es un posible extremo relativo de la función (punto singular o crítico). Para saber si es un máximo o un mínimo relativo debemos estudiar el signo de la segunda derivada:

$$g''(x) = 2 \Rightarrow g''(-3) = 2 > 0$$

Por tanto, como el signo de la segunda derivada es positivo, en $x = -3$ hay un mínimo relativo.

c) Al igual que se ha comentado en el apartado anterior, el estudio de la monotonía de f en el intervalo $(-\infty,\ 0)$, se reduce al estudio de la monotonía de g en el mismo intervalo.

$$g'(x) > 0 \Leftrightarrow 2(x+3) > 0 \Leftrightarrow x+3 > 0 \Leftrightarrow x > -3$$

Por tanto f es estrictamente creciente en el intervalo $(-3,\ 0)$.

$$g'(x) < 0 \Leftrightarrow 2(x+3) < 0 \Leftrightarrow x+3 < 0 \Leftrightarrow x < -3$$

Por tanto f es estrictamente decreciente en el intervalo $(-\infty,\ -3)$.

Obsérvese que es natural que los anteriores sean los intervalos de crecimiento y decrecimiento, pues al ser la función continua en el intervalo $(-\infty,\ 0)$ y tener un mínimo relativo en $x = -3$, debe decrecer a su izquierda, es decir, en $(-\infty,\ -3)$ y crecer a su derecha, es decir, en $(-3,\ 0)$.

5. Una empresa tiene dos líneas de producción. La línea 1 produce el 60 % de los artículos y el resto los produce la línea 2. Sabemos que el 0.5 % de los artículos producidos por la línea 1 tiene algún defecto y así mismo el 2 % de los artículos producidos por la línea 2 son defectuosos.

   a) Elegido un artículo al azar, calcula la probabilidad de que sea defectuoso.

   b) Sabiendo que un artículo tiene defectos, ¿Cuál es la probabilidad de que haya sido producido por la línea 2?

   Solución:
   Llamemos L_1 al suceso "elegido un artículo al azar, que lo produzca la línea 1", L_2 al suceso "elegido un artículo al azar, que lo produzca la línea 2" y D al suceso "elegido un mueble al azar, que sea defectuoso". Según el enunciado del problema $P(L_1) = 0{,}6$, $P(L_2) = 0{,}4$. Además, como el 0.5 % de los artículos producidos por la línea 1 tiene algún defecto y el 2 % de los artículos producidos por la línea 2 son defectuosos, tenemos que $P(D/L_1) = 0{,}005$ y $P(D/L_2) = 0{,}02$.
   Para entender adecuadamente la notación en las probabilidades anteriores, es conveniente observar que el suceso "elegido un artículo al azar producido por la línea 1, que éste sea defectuoso" es el mismo suceso que "el artículo elegido elegido al azar es defectuoso condicionado a que el artículo lo ha producido la línea 1", abreviadamente D/L_1. Análogamente D/L_2 es el suceso "el artículo elegido elegido al azar es defectuoso condicionado a que el artículo lo ha producido la línea 2".

   a) Sea D el suceso "elegido un artículo al azar, que sea defectuoso". Este suceso es la unión de los sucesos "ser defectuoso y haberlo producido la línea 1" y "ser defectuoso y haberlo producido la línea 2". Simbólicamente se escribe $D = (D \cap L_1) \cup (D \cap L_2)$. Los sucesos $D \cap L_1$ y $D \cap L_2$ son incompatibles, pues ningún artículo defectuoso puede ser simultáneamente producido por la línea 1 y la línea 2. Entonces, puesto que la probabilidad de la unión de sucesos incompatibles es la suma de las probabilidades de cada uno de ellos:

   $$P(D) = P\left[(D \cap L_1) \cup (D \cap L_2)\right] = P(D \cap L_1) + P(D \cap L_2)$$

   Además, haciendo uso de la definición de probabilidad condicionada, según la cual, para dos sucesos X e Y cualesquiera $P(X/Y) = \dfrac{P(X \cap Y)}{P(Y)} \Rightarrow P(X \cap Y) = P(Y) \cdot P(X/Y)$, tenemos:

   $$P(D) = P(D \cap L_1) + P(D \cap L_2) = P(L_1) \cdot P(D/L_1) + P(L_2) \cdot P(D/L_2) =$$

   $$= 0{,}6 \cdot 0{,}005 + 0{,}4 \cdot 0{,}02 = 0{,}0011$$

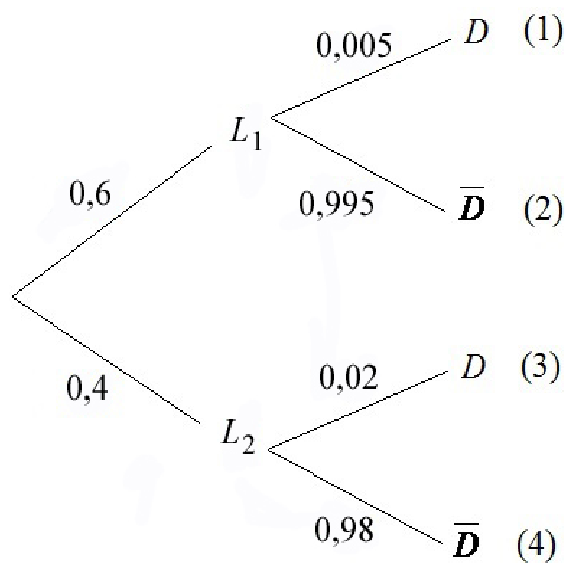
   Esta última igualdad se conoce con el nombre de **teorema de la probabilidad total**.

b) Escribiremos $\overline{D}$ al suceso "elegido un mueble al azar, que no sea defectuoso". Entonces lo que se pide es la probabilidad del suceso $L_2/\overline{D}$:

$$P(L_2/\overline{D}) = \frac{P(L_2 \cap \overline{D})}{P(\overline{D})} = \frac{P(\overline{D}/L_2) \cdot P(L_2)}{1 - P(D)} = \frac{0{,}98 \cdot 0{,}4}{1 - 0{,}011} = \frac{0{,}392}{0{,}989} = 0{,}396$$

Ahora hemos utilizado el **teorema de Bayes**.

También podríamos haber hecho el ejercicio utilizando un diagrama de árbol:



Los números que aparecen sobre cada rama corresponden a probabilidades de sucesos:

- Las de la primera ramificación son probabilidades de los sucesos L_1 y L_2: $P(L_1) = 0{,}6$ y $P(L_2) = 0{,}4$.
- Las de la segunda ramificación son probabilidades condicionadas por los sucesos de la primera: $P(D/L_1) = 0{,}005$, $P(\overline{D}/L_1) = 0{,}995$, $P(D/L_2) = 0{,}02$ y $P(\overline{D}/L_2) = 0{,}98$.

Para hallar la probabilidad de la intersección de dos sucesos basta multiplicar las probabilidades correspondientes a cada una de las ramificaciones correspondientes. Así:

$$P(D) = P(D \cap L_1) + P(D \cap L_2) = P((1)) + P((3)) = 0,6 \cdot 0,005 + 0,4 \cdot 0,02 = 0{,}011$$

$$P(L_2/\overline{D}) = \frac{P(L_2 \cap \overline{D})}{P(\overline{D})} = \frac{P(L_2 \cap \overline{D})}{P(L_1 \cap \overline{D}) + P(L_2 \cap \overline{D})} = \frac{P((4))}{P((2)) + P((4))} =$$

$$= \frac{0{,}4 \cdot 0{,}98}{0{,}6 \cdot 0{,}995 + 0{,}4 \cdot 0{,}98} = 0{,}396$$

6. En un establecimiento de comida rápida se sabe que el tiempo que emplean en comer sus clientes sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica 7 minutos. El tiempo que emplearon 10 clientes elegidos aleatoriamente fue de 15, 20, 28, 21, 26, 30, 16, 18, 35 y 27 minutos respectivamente. Se pide:

   a) Halla el intervalo de confianza para la media del tiempo que tardan en comer los clientes del establecimiento con un nivel de confianza del 97 %.

   b) ¿Cuál debería ser como mínimo el tamaño de la muestra para que el error de estimación de la media sea inferior a 2 minutos con el mismo nivel de confianza?

z	**0.00**	**0.01**	**0.02**	**0.03**	**0.04**	**0.05**	**0.06**	**0.07**	**0.08**	**0.09**
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857

Solución:
Según el enunciado, el tamaño de la muestra es $n = 10$, y la desviación típica es $\sigma = 7$. Por otro lado, con los datos proporcionados, tenemos que la media de la muestra dada es

$$\overline{x} = \frac{15 + 20 + 28 + 21 + 26 + 30 + 16 + 18 + 35 + 27}{10} = 23{,}6$$

a) El intervalo de confianza para la media del tiempo que tardan en comer los clientes viene dado por

$$\left(\overline{x} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \overline{x} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

El valor crítico $z_{\alpha/2}$ es aquel que cumple, sobre la distribución normal estándar, que

$$P\left(Z \leqslant z_{\alpha/2}\right) \leqslant 1 - \frac{\alpha}{2}$$

A un nivel de confianza del 97 % se tiene que:

$$1 - \alpha = 0{,}97 \Rightarrow \alpha = 1 - 0{,}97 \Rightarrow \alpha = 0{,}03 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0{,}015 \Rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0{,}985$$

Entonces hemos de buscar en la tabla de la distribución normal estándar, un valor $z_{\alpha/2}$ tal que $P\left(Z \leqslant z_{\alpha/2}\right) \leqslant 0{,}985$. Esto se cumple exactamente para $z_{\alpha/2} = 2{,}17$. Así pues, el intervalo de confianza para el gasto medio poblacional es:

$$\left(23{,}6 - 2{,}17\frac{7}{\sqrt{10}},\ 23{,}6 - 2{,}17\frac{7}{\sqrt{10}}\right) = (23{,}6 - 4{,}8,\ 23{,}6 + 4{,}8) = (18{,}8,\ 28{,}4)$$

b) El error de estimación de la media viene dado por:

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Si queremos que el error de estimación de la media sea inferior a 2 minutos con el mismo nivel de confianza:

$$z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < 2 \Leftrightarrow 2{,}17\frac{7}{\sqrt{n}} < 2 \Leftrightarrow \sqrt{n} > 7{,}595 \Leftrightarrow n > 57{,}68$$

Por tanto, el tamaño de la muestra debería ser como mínimo $n = 58$.