UCLM - Pruebas de Acceso a Enseñanzas Universitarias Oficiales de Grado (PAEG)

Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales II – Junio 2014 – Propuesta B

Propuesta A. Ejercicio 1

Enunciado:

Considera el siguiente problema de programación lineal:

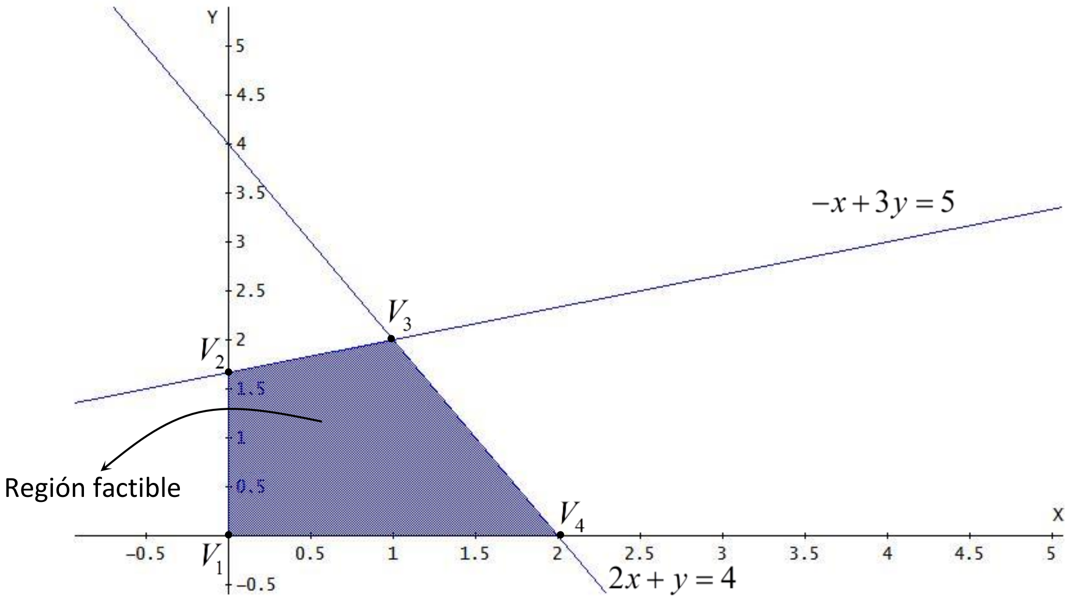
Minimiza la función $z=-2x-3y$ sujeta a las siguientes restricciones:

$$\begin{cases} -x+3y\leq 5 \\ 2x+y\leq 4 \\ x\geq 0 \\ y\geq 0 \end{cases}$$

a) Dibuja la región factible.
b) Determina los vértices de la región factible.
c) Indica la solución óptima del problema dado y su valor.

Solución:

a)



b) Los vértices responden a los puntos de corte de las rectas correspondientes (ver figura anterior). Así:

- El corte entre los dos ejes de coordenadas es $V_1=(0,\ 0)$.
- El corte entre el eje Y y la recta $-x+3y=5$ es $V_2=\left(0,\ \frac{5}{3}\right)$.

- El corte entre la recta $-x+3y=5$ y la recta $2x+y=4$ es $V_3=(1,\ 2)$
- El corte entre la recta $2x+y=4$ y el eje X es $V_4=(2,\ 0)$

c) Veamos los valores que toma la función $z=2x+y$ en cada uno de los vértices:

- En el vértice V_1: $z=-2\cdot 0-3\cdot 0 \Rightarrow z=0$
- En el vértice V_2: $z=-2\cdot 0-3\cdot \frac{5}{3} \Rightarrow z=-5$
- En el vértice V_3: $z=-2\cdot 1-3\cdot 2 \Rightarrow z=-8$
- En el vértice V_4: $z=-2\cdot 2+-3\cdot 0 \Rightarrow z=-4$

Por tanto la solución óptima, mínima en esta caso, se encuentra en el vértice V_3, es decir, para $x=1$ e $y=2$. Su valor, tal y como se ha visto anteriormente, es $z=-8$.

Propuesta A. Ejercicio 2

Enunciado:

Una empresa gasta un total de 1250 euros para que sus 10 empleados realicen un curso de formación. Establece tres cuantías según los niveles de formación: grado 1, grado 2 y grado 3. La empresa concede 80 euros a cada empleado que realice el de grado 1, 150 euros a cada empleado del grado 2 y 200 euros a cada empleado del grado 3. La cantidad total que la empresa gasta en el curso de formación de grado 1 es igual a la que invierte en el curso de formación de grado 3.

a) Plantea el sistema de ecuaciones que nos permita averiguar cuántos empleados van a realizar el curso de formación de grado 1, cuántos de grado 2 y cuántos de grado 3.

b) Resuelve el sistema planteado en el apartado anterior.

Solución:

Llamemos x, y, z al número de empleados de grado 1, de grado 2 y de grado 3, respectivamente.

a) Según el enunciado, el sistema que nos permite averiguar cuántos empleados van a realizar el curso de formación de grado 1, cuántos de grado 2 y cuántos de grado 3, es el siguiente:

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=10 \\ 80x+150y+200z=1250 \\ 80x=200z \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y+z=10 \\ 80x+150y+200z=1250 \\ 80x-200z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y+z=10 \\ 8x+15y+20z=125 \\ 2x-5z=0 \end{array}\right\}$$

b) Utilizaremos el método de Gauss para la resolución del sistema. Para ello escribiremos el sistema en forma de matriz y llamaremos f_1 a la primera fila, f_2 a la segunda y f_3 a la tercera.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 10 \\ 8 & 15 & 20 & 125 \\ 2 & 0 & -5 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \\ f_2-8f_1 \\ f_3-2f_1 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & 7 & 12 & 45 \\ 0 & -2 & -7 & -20 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \\ \\ 7f_3+2f_2 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & 7 & 12 & 45 \\ 0 & 0 & -25 & -50 \end{pmatrix}$$

Obsérvese que se han especificado las operaciones entre filas para obtener cada una de las matrices anteriores.

El sistema asociado a la última matriz es escalonado: $\begin{cases} x+y+z=10 \\ 7y+12z=45 \\ -25z=-50 \end{cases}$. Sus soluciones son:

$z=\dfrac{-50}{-25} \Rightarrow z=2$.

$7y+12\cdot 2=45 \Rightarrow 7y+24=45 \Rightarrow 7y=21 \Rightarrow y=\dfrac{21}{7} \Rightarrow y=3$.

$x+3+2=10 \Rightarrow x=10-3-2 \Rightarrow x=5$.

Por tanto 5 empleados realizarán el curso de formación de grado 1, 3 el de grado 2 y 2 el de grado 3.

PROPUESTA A. EJERCICIO 3

Enunciado:

Se considera la función $f(x)=\begin{cases} |x|-t & \text{si} \quad x\leq 2 \\ x^2-6x+8 & \text{si} \quad x>2 \end{cases}$

a) Halla el valor de t para que f sea continua en $x=2$.

b) Para $t=1$, representa gráficamente la función f.

Solución:

a) $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}\left(|x|-t\right)=|2|-t=2-t$; $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}\left(x^2-6x+8\right)=0$. Una de las condiciones para que f sea continua en $x=2$ es que exista el límite en dicho punto, es decir, que el límite por la izquierda de $x=2$ sea igual al límite por la derecha de $x=2$. En este caso, se debe de cumplir que $2-t=0 \Rightarrow t=2$.

La función queda entonces del siguiente modo: $f(x)=\begin{cases} |x|-2 & \text{si} \quad x\leq 2 \\ x^2-6x+8 & \text{si} \quad x>2 \end{cases}$. Por lo anterior se tiene que

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}\left(|x|-2\right)=0 \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}\left(x^2-6x+8\right)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to 2} f(x)=0=f(2) \text{ y } f \text{ es continua en } x=2.$$

Resumiendo, para que f sea continua en $x=2$, debe ser $t=2$.

b) Si $t=1$, la función es $f(x)=\begin{cases} |x|-1 & \text{si} \quad x\leq 2 \\ x^2-6x+8 & \text{si} \quad x>2 \end{cases}$

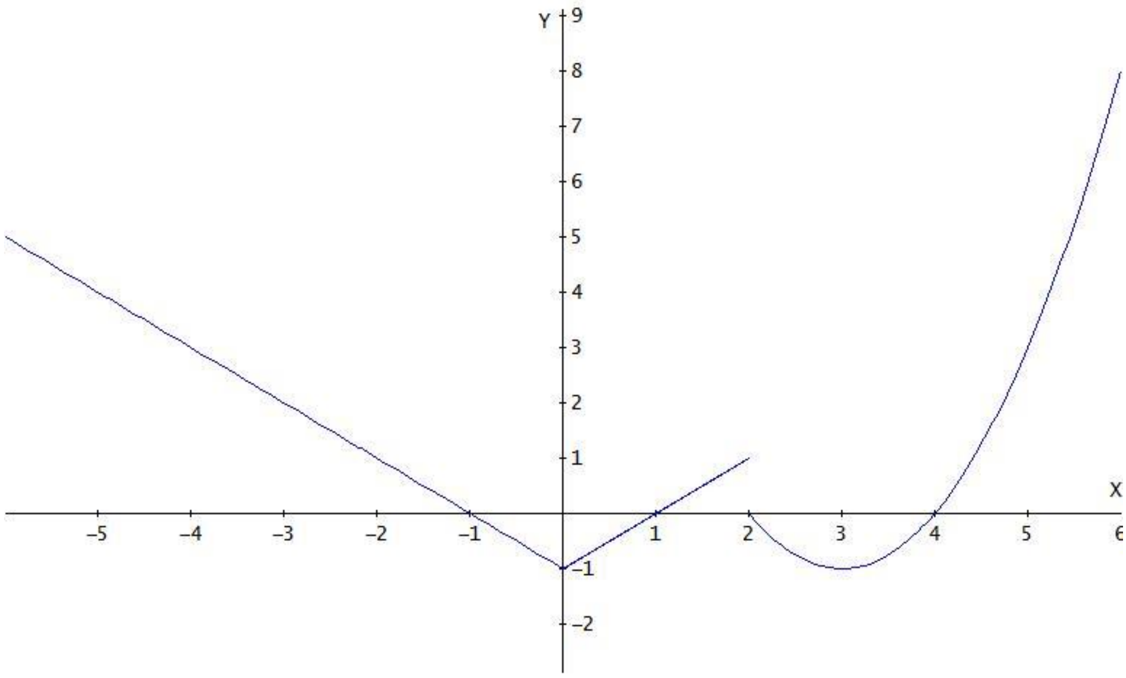
Escribamos la función de una manera equivalente:

$|x|=x \Leftrightarrow x\geq 0$; $|x|=-x \Leftrightarrow x<0$

Por tanto:

$$f(x)=\begin{cases} -x-1 & \text{si} \quad x<0 \\ x-1 & \text{si} \quad 0\leq x\leq 2 \\ x^2-6x+8 & \text{si} \quad x>2 \end{cases}$$

Ahora es fácil representarla, pues se trata de dos “trozos” de recta y de un “trozo” de parábola:



PROPUESTA A. EJERCICIO 4

Enunciado:

En una ciudad, el registro durante cinco horas de la humedad relativa del aire, medida en %, se ajusta a la función $f(t)=2t^3-15t^2+24t+75$, $0<t<5$, siendo t el tiempo medido en horas.

a) ¿A qué hora se registró la máxima cantidad de humedad relativa del aire y cuál fue dicha cantidad?
b) ¿A qué hora se registró la mínima cantidad de humedad relativa del aire y cuál fue dicha cantidad?

Solución:

$f'(t)=6t^2-30t+24$. Resolviendo la ecuación $f'(t)=0$ obtenemos los puntos que son "candidatos" a ser extremos relativos de la función.

$$6t^2-30t+24=0 \Leftrightarrow t=\frac{30\pm\sqrt{900-4\cdot 6\cdot 24}}{12}=\frac{30\pm\sqrt{324}}{12}=\frac{30\pm 18}{12}=\begin{cases} t_1=4 \\ t_2=1 \end{cases}$$

La segunda derivada de f es $f''(t)=12y-30$. Estudiemos el signo de la segunda derivada en los dos puntos anteriores para decidir si se tratan de máximos o mínimos relativos.

$f''(4)=12\cdot 4-30=48-30=18>0$. Entonces $t=4$ es un mínimo relativo. Esto quiere decir que al cabo de cuatro horas se registró la mínima cantidad de humedad relativa del aire.
Como $f(4)=2\cdot 4^3-15\cdot 4^2+24\cdot 4+75=128-240+96+75=59$, dicha cantidad de humedad relativa del aire fue del 59%.

$f''(1)=12\cdot 1-30=12-30=-18<0$. Entonces $t=1$ es un máximo relativo. Esto quiere decir que al cabo de una hora se registró la máxima cantidad de humedad relativa del aire.
Como $f(1)=2\cdot 1^3-15\cdot 1^2+24\cdot 1+75=2-15+24+75=86$, dicha cantidad de humedad relativa del aire fue del 86%.

PROPUESTA A. EJERCICIO 5

Enunciado:

En una empresa hay tres robots A, B y C dedicados a soldar productos. El 15 % de los productos son soldados por el robot A, el 20 % por el B y el 65 % por el C. Se sabe que la probabilidad de que un producto tenga un defecto de soldadura es de 0,02 si ha sido soldado por el robot A, 0,03 por el robot B y 0,01 por el robot C.

a) Elegido un producto al azar, ¿cuál es la probabilidad de que tenga un defecto de soldadura?
b) Se escoge al azar un producto y resulta tener un defecto de soldadura, ¿cuál es la probabilidad de que haya sido soldado por el robot A?

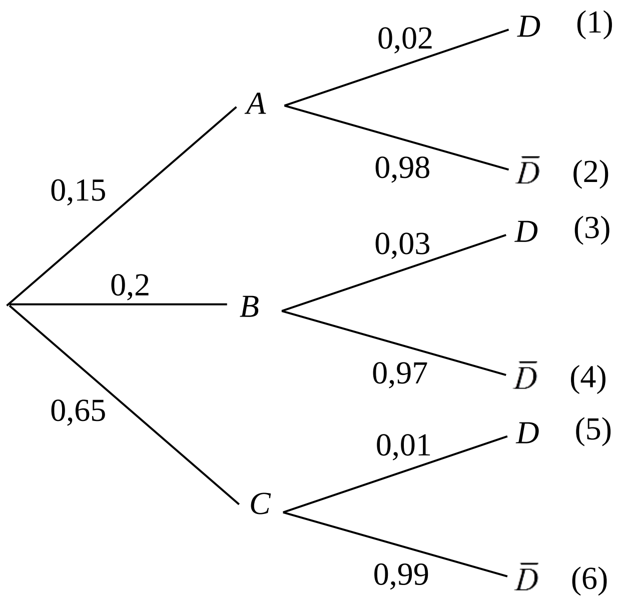
Solución:

Llamemos A al suceso "elegido un producto al azar, que haya sido soldada por el robot A", B al suceso "elegido un producto al azar, que haya sido soldada por el robot B" y C al suceso "elegido un producto al azar, que haya sido soldada por el robot C". Llamemos también D al suceso "elegido un producto al azar, que tenga defecto de soldadura". Entonces $P(A)=0{,}15$, $P(B)=0{,}2$ y $P(C)=0{,}65$. El enunciado del problema también nos proporciona otras tres probabilidades, condicionadas en este caso: $P(D/A)=0{,}02$, $P(D/B)=0{,}03$ y $P(D/C)=0{,}01$.

a) Por el teorema de la probabilidad total, la probabilidad de que un producto tenga defecto de soldadura es:

$$P(D)=P\big((D\cap A)\cup(D\cap B)\cup(D\cap C)\big)=P(D\cap A)+P(D\cap B)+P(D\cap C)=$$
$$=P(D/A)P(A)+P(D/B)P(B)+P(D/C)P(C)=0{,}02\cdot 0{,}15+0{,}03\cdot 0{,}2+0{,}01\cdot 0{,}65=0{,}0155$$

Es posible que se vea mejor haciendo un diagrama de árbol:



$$P(D)=(1)+(3)+(5)=0{,}02\cdot 0{,}15+0{,}03\cdot 0{,}2+0{,}01\cdot 0{,}65=0{,}0155$$

b) Lo que se pide es la probabilidad $P(A/D)$. Aprovecharemos el diagrama de árbol y la probabilidad de que un producto elegido al azar tenga defecto de soldadura, hallada en el apartado anterior.

$$P(A/D)=\frac{P(A\cap D)}{P(D)}=\frac{0{,}15\cdot 0{,}02}{0{,}0155}=\frac{0{,}003}{0{,}0155}=0{,}1935.$$

PROPUESTA A. EJERCICIO 6

Enunciado:

En un aeropuerto, el tiempo de espera de un viajero frente a la cinta transportadora hasta que sale su maleta sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica $\sigma = 3$ minutos. Se tomó una muestra aleatoria de 50 viajeros, y se observó que el tiempo medio de espera era de 17 minutos.

a) Halla un intervalo de confianza para la media poblacional del tiempo de espera de la maleta en ese aeropuerto con un nivel de confianza del 95 %.

b) ¿Se puede admitir que la media poblacional sea $\mu = 16$ con un nivel de confianza del 95 %? ¿Cómo podríamos disminuir la amplitud del intervalo de confianza sin variar el nivel de confianza? Razona tus respuestas.

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767

Solución:

a) El intervalo de confianza para el gasto medio poblacional viene dado por $\left(\overline{x} - z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \overline{x} + z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$.

El valor crítico $z_{\alpha/2}$ es aquel que cumple, en la distribución normal estándar, $P\left(Z \leq z_{\alpha/2}\right) \leq 1 - \dfrac{\alpha}{2}$.

A un nivel de confianza del 95% tenemos que:

$$1-\alpha = 0,95 \Rightarrow \alpha = 1-0,95 \Rightarrow \alpha = 0,05 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0,025 \Rightarrow 1-\frac{\alpha}{2} = 0,975.$$

Entonces hemos de buscar en la tabla un valor $z_{\alpha/2}$ tal que $P\left(Z \leq z_{\alpha/2}\right) \leq 0,975$. Esto se cumple exactamente para $z_{\alpha/2} = 1,96$.

Así pues el intervalo de confianza para el gasto medio poblacional es:

$$\left(17 - 1,96\frac{3}{\sqrt{50}}\ ,\ 17 + 1,96\frac{3}{\sqrt{50}}\right) = \left(17 - 0,83\ ,\ 17 + 0,83\right) = \left(16,17\ ,\ 17,83\right).$$

b) No se puede admitir que la media poblacional sea $\mu = 16$ con un nivel de confianza del 95 %, pues tal valor no pertenece al intervalo de confianza hallado en el apartado anterior.

Podríamos disminuir la amplitud del intervalo de confianza sin variar el nivel de confianza, aumentando el tamaño de la muestra.

Si tomamos $n' \geq n$, entonces $\sqrt{n'} \geq \sqrt{n} \Rightarrow \dfrac{1}{\sqrt{n'}} \leq \dfrac{1}{\sqrt{n}} \Rightarrow z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n'}} \leq z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

Por tanto, en el intervalo de confianza, restaríamos y sumaríamos a la media $\overline{x}$ una cantidad menor, lo que haría que la amplitud del intervalo disminuyese.