

UCLM - Pruebas de Acceso a Enseñanzas Universitarias Oficiales de Grado (PAEG)

Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales II – Junio 2013 – Propuesta B

PROPUESTA B. EJERCICIO 1

Enunciado:

Dadas las matrices: $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$:

- a) Calcula la matriz $M = (3 \cdot I + A^2)$, donde I es la matriz identidad de orden 3.
b) Calcula la matriz X tal que $X \cdot B = I$ donde I es la matriz identidad de orden 2.

Solución:

a)
$$M = 3 \cdot I + A^2 = 3 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 5 & 8 & 5 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 1 \\ 5 & 11 & 5 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

b) $X \cdot B = I \Rightarrow X \cdot B \cdot B^{-1} = I \cdot B^{-1} \Rightarrow X \cdot I = I \cdot B^{-1} \Rightarrow X = I \cdot B^{-1} \Rightarrow X = B^{-1}$.

En realidad no haría falta despejar nada, pues la matriz X que multiplicada por B da como resultado la matriz identidad, es la matriz inversa de B .

Calculemos pues la inversa de la matriz B .

Determinante de B : $|B| = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 5 = -5$.

Adjunta de la matriz B : $B^d = \begin{pmatrix} 0 & -5 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.

Traspuesta de la adjunta de la matriz B : $(B^d)^t = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -5 & -1 \end{pmatrix}$.

Inversa de la matriz B : $B^{-1} = \frac{1}{|B|} (B^d)^t = \frac{1}{-5} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -5 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1/5 \\ 1 & 1/5 \end{pmatrix}$.

Por tanto: $X = B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1/5 \\ 1 & 1/5 \end{pmatrix}$.

PROPUESTA B. EJERCICIO 2

Enunciado:

Una empresa produce tres tipos de bicicletas: de montaña, de paseo y estáticas. Para su fabricación cada bicicleta necesita piezas de acero, aluminio y fibra de carbono en las cantidades que se indican en la tabla siguiente:

	Bicicleta de montaña	Bicicleta de paseo	Bicicleta estática
Piezas de acero	2	3	1
Piezas de aluminio	6	4	6
Piezas de fibra de carbono	8	6	6

Si se dispone de 9 piezas de acero, 28 piezas de aluminio y 34 piezas de fibra de carbono:

- a) Plantea el sistema que nos permita obtener el número de bicicletas de cada tipo que se podrán fabricar utilizando todas las piezas.
- b) Resuelve el sistema planteado en el apartado anterior.

Solución:

- a) Llamemos x al número de bicicletas de montaña, y al número de bicicletas de paseo y z al número de bicicletas estáticas.

Las piezas de acero que en total hacen falta son, según la tabla, 2 por cada bicicleta de montaña, 3 por cada bicicleta de paseo y 1 por cada bicicleta estática, es decir, $2x+3y+z$. Como se dispone de 9 piezas de acero se tiene que $2x+3y+z=9$.

Del mismo modo, las piezas de aluminio que en total hacen falta son: $6x+4y+6z=28$.

Y, finalmente, las piezas de fibra de carbono que hacen falta son: $8x+6y+6z=34$.

Entonces el sistema que permite obtener el número de bicicletas de cada tipo es:

$$\begin{cases} 2x+3y+z=9 \\ 6x+4y+6z=28 \\ 8x+6y+6z=34 \end{cases}$$

- b) Apliquemos el método de Gauss para resolver el sistema anterior. Para ello lo vamos a escribir en forma de matriz y llamaremos f_1 a la primera fila, f_2 a la segunda y f_3 a la tercera.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 9 \\ 6 & 4 & 6 & 28 \\ 8 & 6 & 6 & 34 \end{pmatrix} \begin{matrix} f_2 - 3f_1 \\ f_3 - 4f_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 9 \\ 0 & -5 & 3 & 1 \\ 0 & -6 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} -5f_3 + 6f_2 \end{matrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 9 \\ 0 & -5 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 8 & 16 \end{pmatrix}$$

Obsérvese que se han especificado las operaciones entre filas para obtener cada una de las matrices anteriores.

El sistema asociado a la última matriz es escalonado: $\begin{cases} 2x+3y+z=9 \\ -5y+3z=1 \\ 8z=16 \end{cases}$. Sus soluciones son $z = \frac{16}{8} \Rightarrow z = 2$,

$$-5y+3 \cdot 2=1 \Rightarrow -5y+6=1 \Rightarrow -5y=-5 \Rightarrow y=1, \quad 2x+3 \cdot 1+2=9 \Rightarrow 2x+3+2=9 \Rightarrow 2x=4 \Rightarrow x=2.$$

PROPUESTA B. EJERCICIO 3

Enunciado:

Se considera la función $f(x) = \begin{cases} |x-t| & \text{si } x \leq 2 \\ (x-3)^2 - 1 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

- a) ¿Para qué valor de t la función $f(x)$ es continua en $x = 2$?
- b) Calcula los extremos relativos de la función $f(x)$ en el intervalo $(2, +\infty)$.
- c) Calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)$ en $(2, +\infty)$.

Solución:

- a) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} |x-t| = |2-t|$; $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} ((x-3)^2 - 1) = 0$. Una de las condiciones para que f sea continua en $x = 2$ es que exista el límite en dicho punto, es decir, que el límite por la izquierda de $x = 2$ sea igual al límite por la derecha de $x = 2$. En este caso, se debe de cumplir que $|2-t| = 0 \Rightarrow 2-t = 0 \Rightarrow t = 2$.

La función queda entonces del siguiente modo: $f(x) = \begin{cases} |x-2| & \text{si } x \leq 2 \\ (x-3)^2 - 1 & \text{si } x > 2 \end{cases}$. Por lo anterior se tiene que

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} |x-2| = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} ((x-3)^2 - 1) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 0 = f(2) \text{ y } f \text{ es continua en } x = 2.$$

Así, para que f sea continua en $x = 2$, debe ser $t = 2$.

- b) En el intervalo $(2, +\infty)$, la derivada es $f'(x) = 2(x-3) = 2x-6$. Si la igualamos a cero obtenemos los posibles extremos relativos de la función: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x-6 = 0 \Leftrightarrow x = 3$. Como la segunda derivada es $f''(x) = 2$, que siempre es mayor que cero, sea quien sea $x \in \mathbb{R}$, se deduce que $x = 3$ es un mínimo relativo. Como $f(3) = (3-3)^2 - 1 = -1$, el mínimo relativo es el punto $(3, -1)$. Además no hay máximos relativos.
- c) $f'(x) > 0 \Leftrightarrow 2x-6 > 0 \Leftrightarrow 2x > 6 \Leftrightarrow x > 3$. Entonces f es estrictamente creciente en $(3, +\infty)$.
 $f'(x) < 0 \Leftrightarrow 2x-6 < 0 \Leftrightarrow 2x < 6 \Leftrightarrow x < 3$. Entonces f es estrictamente decreciente en $(2, 3)$.

Los apartados b) y c) anteriores se podían haber resuelto conjuntamente haciendo una tabla:

	$(2, 3)$	3	$(3, +\infty)$
f'	-	0	+
f	↓↓	mínimo	↑↑

De la tabla se desprende que en el intervalo $(2, 3)$ la función es estrictamente decreciente, en el intervalo $(3, +\infty)$ estrictamente creciente y en $x = 3$ hay un mínimo relativo porque justamente en ese punto la función cambia de ser decreciente a creciente.

PROPUESTA B. EJERCICIO 4

Enunciado:

En un tramo de una montaña rusa, la altura alcanzada por el vagón, medida en metros, se ajusta a la función $f(t) = t^3 - 9t^2 + 15t + 38$, siendo t el tiempo medido en segundos, $0 \leq t \leq 6$.

- ¿En qué instante t , el vagón alcanza la altura máxima en ese tramo, y cuál es dicha altura?
- ¿En qué instante t , el vagón alcanza la altura mínima en el tramo mencionado, y cuánto vale dicha altura?

Solución:

La derivada de la función f es $f'(t) = 3t^2 - 18t + 15$.

Si la igualamos a cero obtenemos los posibles extremos relativos de la función:

$$f'(t) = 0 \Leftrightarrow 3t^2 - 18t + 15 = 0 \Leftrightarrow t^2 - 6t + 5 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 20}}{2} \Leftrightarrow t = \frac{6 \pm \sqrt{16}}{2} \Leftrightarrow t = \frac{6 \pm 4}{2} = \begin{cases} t_1 = 5 \\ t_2 = 1 \end{cases}$$

La segunda derivada de la función f es $f''(t) = 6t - 18$. Entonces:

- $f'(1) = -12 < 0 \Rightarrow t = 1$ es un máximo relativo. Esto quiere decir que la altura máxima se alcanza en el instante $t = 1$ segundo.

Dicha altura máxima es $f(1) = 1^3 - 9 \cdot 1^2 + 15 \cdot 1 + 38 = 1 - 9 + 15 + 38 = 45$ metros.

- $f'(5) = 12 > 0 \Rightarrow t = 5$ es un mínimo relativo (y absoluto por lo visto anteriormente). Esto quiere decir que la altura mínima se alcanza en el instante $t = 5$ segundos.

Dicha altura mínima es $f(5) = 5^3 - 9 \cdot 5^2 + 15 \cdot 5 + 38 = 125 - 225 + 75 + 38 = 13$ metros.

Se podría alcanzar también el máximo o el mínimo en los extremos del intervalo, pero $f(0) = 38$ (lo que quiere decir que la montaña rusa sale ya a una altura de 38 metros), y $f(6) = 20$. Ninguno de estos dos valores es, o bien mayor que 45, o bien menor que 13 con lo que ninguno de los dos da lugar ni a la máxima ni a la mínima altura.

PROPUESTA B. EJERCICIO 5

Enunciado:

En un colegio el 30% de los alumnos juegan al baloncesto, el 40% juegan al fútbol, y el 50% juegan al fútbol o al baloncesto o a ambos deportes.

- Se elige un alumno al azar, ¿cuál es la probabilidad de que juegue al fútbol y juegue al baloncesto?
- Si elegimos un alumno al azar y juega al baloncesto, ¿cuál es la probabilidad de que juegue al fútbol?

Solución:

Llamemos B al suceso "jugar al baloncesto" y F al suceso "jugar al fútbol". Entonces los porcentajes del enunciado se pueden escribir, en términos de probabilidad, del siguiente modo: $P(B) = 0,3$, $P(F) = 0,4$, $P(F \cup B) = 0,5$.

- La probabilidad de que un alumno elegido al azar juegue al fútbol y juegue al baloncesto es $P(F \cap B)$. Luego:

$$P(F \cup B) = P(F) + P(B) - P(F \cap B) \Rightarrow 0,5 = 0,3 + 0,4 - P(F \cap B) \Rightarrow P(F \cap B) = 0,3 + 0,4 - 0,5 \Rightarrow P(F \cap B) = 0,2.$$

- b) En este caso se trata de un probabilidad condicionada por el suceso “jugar al baloncesto”, es decir, por el suceso B . Hemos de calcular pues $P(F/B)$. Utilizando la fórmula de la probabilidad condicionada:

$$P(F/B) = \frac{P(F \cap B)}{P(B)} = \frac{0,2}{0,3} = 0,67.$$

PROPUESTA B. EJERCICIO 6

Enunciado:

Una fábrica produce cables de acero, cuya resiliencia sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica $\sigma = 10 \text{ KJ/m}^3$. Se tomó una muestra de 100 piezas y mediante un estudio estadístico se obtuvo un intervalo de confianza $(898,04, 901,96)$ para la resiliencia media de los cables de acero producidos en la fábrica.

- a) Calcula el valor de la resiliencia media de las 100 piezas de la muestra.
b) Calcula el nivel de confianza con el que se ha obtenido dicho intervalo.

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767

Solución:

- a) Sabemos que el intervalo de confianza para la media es $\left(\bar{x} - z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$. Entonces se tiene que

$$\left. \begin{array}{l} \bar{x} - z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 898,04 \\ \bar{x} + z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 901,96 \end{array} \right\} \Rightarrow 2\bar{x} = 1800 \Rightarrow \bar{x} = 900.$$

- b) Del apartado anterior se deduce que $z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,96$. Como $\sigma = 10$ y $n = 100$, entonces:

$$z_{\alpha/2} \frac{10}{\sqrt{100}} = 1,96 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1,96.$$

Lo anterior indica que, en la distribución normal estándar, el valor que deja por debajo una probabilidad $1 - \frac{\alpha}{2}$

es 1,96. Es decir, $P(Z \leq 1,96) = 1 - \frac{\alpha}{2}$. Mirando en la tabla: $0,9750 = 1 - \frac{\alpha}{2} \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0,025 \Rightarrow \alpha = 0,05$.

Se sabe que el nivel de confianza viene dado por la expresión $(1 - \alpha) \cdot 100 \%$. Por tanto, en este caso, el nivel de confianza es del $(1 - 0,05) \cdot 100 \% = 95 \%$.