UCLM - Pruebas de Acceso a Enseñanzas Universitarias Oficiales de Grado (PAEG)

Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales II – Junio 2013 – Propuesta B

PROPUESTA B. EJERCICIO 1

Enunciado:

Dadas las matrices: $A=\begin{pmatrix}1&-1&1\\1&3&1\\1&0&1\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}-1&1\\5&0\end{pmatrix}$:

a) Calcula la matriz $M=\left(3\cdot I+A^2\right)$, donde I es la matriz identidad de orden 3.

b) Calcula la matriz X tal que $X\cdot B=I$ donde I es la matriz identidad de orden 2.

Solución:

a)
$$M=3\cdot I+A^2=3\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&-1&1\\1&3&1\\1&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&-1&1\\1&3&1\\1&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&3&0\\0&0&3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&-4&1\\5&8&5\\2&-1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&-4&1\\5&11&5\\2&-1&5\end{pmatrix}.$$

b) $X\cdot B=I\Rightarrow X\cdot B\cdot B^{-1}=I\cdot B^{-1}\Rightarrow X\cdot I=I\cdot B^{-1}\Rightarrow X=I\cdot B^{-1}\Rightarrow X=B^{-1}$.

En realidad no haría falta despejar nada, pues la matriz X que multiplicada por B da como resultado la matriz identidad, es la matriz inversa de B.

Calculemos pues la inversa de la matriz B.

Determinante de B: $|B|=\begin{vmatrix}-1&1\\5&0\end{vmatrix}=0-5=-5$.

Adjunta de la matriz B: $B^d=\begin{pmatrix}0&-5\\-1&-1\end{pmatrix}$.

Traspuesta de la adjunta de la matriz B: $\left(B^d\right)^t=\begin{pmatrix}0&-1\\-5&-1\end{pmatrix}$.

Inversa de la matriz B: $B^{-1}=\frac{1}{|B|}\left(B^d\right)^t=\frac{1}{-5}\begin{pmatrix}0&-1\\-5&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1/5\\1&1/5\end{pmatrix}$.

Por tanto: $X=B^{-1}=\begin{pmatrix}0&1/5\\1&1/5\end{pmatrix}$.

PROPUESTA B. EJERCICIO 2

Enunciado:

Una empresa produce tres tipos de bicicletas: de montaña, de paseo y estáticas. Para su fabricación cada bicicleta necesita piezas de acero, aluminio y fibra de carbono en las cantidades que se indican en la tabla siguiente:

	Bicicleta de montaña	Bicicleta de paseo	Bicicleta estática
Piezas de acero	2	3	1
Piezas de aluminio	6	4	6
Piezas de fibra de carbono	8	6	6

Si se dispone de 9 piezas de acero, 28 piezas de aluminio y 34 piezas de fibra de carbono:

a) Plantea el sistema que nos permita obtener el número de bicicletas de cada tipo que se podrán fabricar utilizando todas las piezas.
b) Resuelve el sistema planteado en el apartado anterior.

Solución:

a) Llamemos x al número de bicicletas de montaña, y al número de bicicletas de paseo y z al número de bicicletas estáticas.

Las piezas de acero que en total hacen falta son, según la tabla, 2 por cada bicicleta de montaña, 3 por cada bicicleta de pase y 1 por cada bicicleta estática, es decir, $2x+3y+z$. Como se dispone de 9 piezas de acero se tiene que $2x+3y+z=9$.

Del mismo modo, las piezas de aluminio que en total hacen falta son: $6x+4y+6z=28$.

Y, finalmente, las piezas de fibra de carbono que hacen falta son: $8x+6y+6z=34$.

Entonces el sistema que permite obtener el número de bicicletas de cada tipo es:

$$\begin{cases} 2x+3y+z=9 \\ 6x+4y+6z=28 \\ 8x+6y+6z=34 \end{cases}$$

b) Apliquemos el método de Gauss para resolver el sistema anterior. Para ello lo vamos a escribir en forma de matriz y llamaremos f_1 a la primera fila, f_2 a la segunda y f_3 a la tercera.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 9 \\ 6 & 4 & 6 & 28 \\ 8 & 6 & 4 & 34 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ f_2-3f_1 \\ f_3-4f_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 9 \\ 0 & -5 & 3 & 1 \\ 0 & -6 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ -5f_3+6f_2 \end{matrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 9 \\ 0 & -5 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 8 & 16 \end{pmatrix}$$

Obsérvese que se han especificado las operaciones entre filas para obtener cada una de las matrices anteriores.

El sistema asociado a la última matriz es escalonado: $\begin{cases} 2x+3y+z=9 \\ -5y+3z=1 \\ 8z=16 \end{cases}$. Sus soluciones son $z=\frac{16}{8}\Rightarrow z=2$,

$-5y+3\cdot 2=1\Rightarrow -5y+6=1\Rightarrow -5y=-5\Rightarrow y=1$, $2x+3\cdot 1+2=9\Rightarrow 2x+3+2=9\Rightarrow 2x=4\Rightarrow x=2$.

PROPUESTA B. EJERCICIO 3

Enunciado:

Se considera la función $f(x)=\begin{cases}|x-t| & \text{si} \quad x\le 2\\ (x-3)^2-1 & \text{si} \quad x>2\end{cases}$

a) ¿Para qué valor de t la función $f(x)$ es continua en $x=2$?

b) Calcula los extremos relativos de la función $f(x)$ en el intervalo $(2,+\infty)$.

c) Calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)$ en $(2,+\infty)$.

Solución:

a) $\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^-}|x-t|=|2-t|$; $\lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^+}\left((x-3)^2-1\right)=0$. Una de las condiciones para que f sea continua en $x=2$ es que exista el límite en dicho punto, es decir, que el límite por la izquierda de $x=2$ sea igual al límite por la derecha de $x=2$. En este caso, se debe de cumplir que $|2-t|=0\Rightarrow 2-t=0\Rightarrow t=2$.

La función queda entonces del siguiente modo: $f(x)=\begin{cases}|x-2| & \text{si} \quad x\le 2\\ (x-3)^2-1 & \text{si} \quad x>2\end{cases}$. Por lo anterior se tiene que

$$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^-}|x-2|=0\\ \lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^+}\left((x-3)^2-1\right)=0\end{array}\right\}\Rightarrow \lim_{x\to 2} f(x)=0=f(2) \text{ y } f \text{ es continua en } x=2.$$

Así, para que f sea continua en $x=2$, debe ser $t=2$.

b) En el intervalo $(2,+\infty)$, la derivada es $f'(x)=2(x-3)=2x-6$. Si la igualamos a cero obtenemos los posibles extremos relativos de la función: $f'(x)=0\Leftrightarrow 2x-6=0\Leftrightarrow x=3$. Como la segunda derivada es $f''(x)=2$, que siempre es mayor que cero, sea quien sea $x\in\mathbb{R}$, se deduce que $x=3$ es un mínimo relativo. Como $f(3)=(3-3)^2-1=-1$, el mínimo relativo es el punto $(3,-1)$. Además no hay máximos relativos.

c) $f'(x)>0\Leftrightarrow 2x-6>0\Leftrightarrow 2x>6\Leftrightarrow x>3$. Entonces f es estrictamente creciente en $(3,+\infty)$.

$f'(x)<0\Leftrightarrow 2x-6<0\Leftrightarrow 2x<6\Leftrightarrow x<3$. Entonces f es estrictamente decreciente en $(2,3)$.

Los apartados b) y c) anteriores se podían haber resuelto conjuntamente haciendo una tabla:

	$(2,3)$	3	$(3,+\infty)$
f'	$-$	0	$+$
f	$\downarrow\downarrow$	mínimo	$\uparrow\uparrow$

De la tabla se desprende que en el intervalo $(2,3)$ la función es estrictamente decreciente, en el intervalo $(3,+\infty)$ estrictamente creciente y en $x=3$ hay un mínimo relativo porque justamente en ese punto la función cambia de ser decreciente a creciente.

PROPUESTA B. EJERCICIO 4

Enunciado:

En un tramo de una montaña rusa, la altura alcanzada por el vagón, medida en metros, se ajusta a la función $f(t)=t^3-9t^2+15t+38$, siendo t el tiempo medido en segundos, $0\leq t\leq 6$.

a) ¿En qué instante t, el vagón alcanza la altura máxima en ese tramo, y cuál es dicha altura?
b) ¿En qué instante t, el vagón alcanza la altura mínima en el tramo mencionado, y cuánto vale dicha altura?

Solución:

La derivada de la función f es $f'(t)=3t^2-18t+15$.

Si la igualamos a cero obtenemos los posibles extremos relativos de la función:

$$f'(t)=0\Leftrightarrow 3t^2-18t+15=0\Leftrightarrow t^2-6t+5=0\Leftrightarrow t=\frac{6\pm\sqrt{36-20}}{2}\Leftrightarrow t=\frac{6\pm\sqrt{16}}{2}\Leftrightarrow t=\frac{6\pm 4}{2}=\begin{cases}t_1=5\\ t_2=1\end{cases}$$

La segunda derivada de la función f es $f''(t)=6t-18$. Entonces:

a) $f'(1)=-12<0\Rightarrow t=1$ es un máximo relativo. Esto quiere decir que la altura máxima se alcanza en el instante $t=1$ segundo.
Dicha altura máxima es $f(1)=1^3-9\cdot 1^2+15\cdot 1+38=1-9+15+38=45$ metros.

b) $f'(5)=12>0\Rightarrow t=5$ es un mínimo relativo (y absoluto por lo visto anteriormente). Esto quiere decir que la altura mínima se alcanza en el instante $t=5$ segundos.
Dicha altura mínima es $f(5)=5^3-9\cdot 5^2+15\cdot 5+38=125-225+75+38=13$ metros.

Se podría alcanzar también el máximo o el mínimo en los extremos del intervalo, pero $f(0)=38$ (lo que quiere decir que la montaña rusa sale ya a una altura de 38 metros), y $f(6)=20$. Ninguno de estos dos valores es, o bien mayor que 45, o bien menor que 13 con lo que ninguno de los dos da lugar ni a la máxima ni a la mínima altura.

PROPUESTA B. EJERCICIO 5

Enunciado:

En un colegio el 30% de los alumnos juegan al baloncesto, el 40% juegan al fútbol, y el 50% juegan al fútbol o al baloncesto o a ambos deportes.

a) Se elige un alumno al azar, ¿cuál es la probabilidad de que juegue al fútbol y juegue al baloncesto?
b) Si elegimos un alumno al azar y juega al baloncesto, ¿cuál es la probabilidad de que juegue al fútbol?

Solución:

Llamemos B al suceso “jugar al baloncesto” y F al suceso “jugar al fútbol”. Entonces los porcentajes del enunciado se pueden escribir, en términos de probabilidad, del siguiente modo: $P(B)=0{,}3$, $P(F)=0{,}4$, $P(F\cup B)=0{,}5$.

a) La probabilidad de que un alumno elegido al azar juegue al fútbol y juegue al baloncesto es $P(F\cap B)$. Luego:

$$P(F\cup B)=P(F)+P(B)-P(F\cap B)\Rightarrow 0{,}5=0{,}3+0{,}4-P(F\cap B)\Rightarrow P(F\cap B)=0{,}3+0{,}4-0{,}5\Rightarrow$$
$$\Rightarrow P(F\cap B)=0{,}2.$$

b) En este caso se trata de un probabilidad condicionada por el suceso "jugar al baloncesto", es decir, por el suceso B. Hemos de calcular pues $P(F/B)$. Utilizando la fórmula de la probabilidad condicionada:

$$P(F/B)=\frac{P(F\cap B)}{P(B)}=\frac{0,2}{0,3}=0,67.$$

PROPUESTA B. EJERCICIO 6

Enunciado:

Una fábrica produce cables de acero, cuya resiliencia sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica $\sigma=10\ KJ/m^3$. Se tomó una muestra de 100 piezas y mediante un estudio estadístico se obtuvo un intervalo de confianza $(898,04,\ 901,96)$ para la resiliencia media de los cables de acero producidos en la fábrica.

a) Calcula el valor de la resiliencia media de las 100 piezas de la muestra.
b) Calcula el nivel de confianza con el que se ha obtenido dicho intervalo.

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767

Solución:

a) Sabemos que el intervalo de confianza para la media es $\left(\overline{x}-z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \overline{x}+z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$. Entonces se tiene que

$$\left.\begin{aligned}\overline{x}-z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=898,04\\ \overline{x}+z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=901,96\end{aligned}\right\}\Rightarrow 2\overline{x}=1800\Rightarrow \overline{x}=900.$$

b) Del apartado anterior se deduce que $z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=1,96$. Como $\sigma=10$ y $n=100$, entonces:

$$z_{\alpha/2}\frac{10}{\sqrt{100}}=1,96\Rightarrow z_{\alpha/2}=1,96.$$

Lo anterior indica que, en la distribución normal estándar, el valor que deja por debajo una probabilidad $1-\frac{\alpha}{2}$ es $1,96$. Es decir, $P(Z\leq 1,96)=1-\frac{\alpha}{2}$. Mirando en la tabla: $0,9750=1-\frac{\alpha}{2}\Rightarrow\frac{\alpha}{2}=0,025\Rightarrow\alpha=0,05$.

Se sabe que el nivel de confianza viene dado por la expresión $(1-\alpha)\cdot 100\ \%$. Por tanto, en este caso, el nivel de confianza es del $(1-0,05)\cdot 100\ \%=95\ \%$.