Pruebas de Acceso a Enseñanzas Universitarias Oficiales de Grado (PAEG)
Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales II - Junio 2012 - Propuesta B

1. Una empresa tiene 3000 bolsas de ajo morado de Las Pedroñeras y 2000 botellas de aceite de oliva de Los Montes de Toledo. Desea elaborar dos tipos de lotes para regalo con dichos productos: lotes de tipo A formados por tres bolsas de ajos y una botella de aceite de oliva, que venderá a 50 euros; lotes de tipo B formados por una bolsa de ajos y dos botellas de aceite de oliva que venderá a 80 euros.

   a) Dibuja la región factible.

   b) ¿Cuántos lotes de cada tipo deberá preparar para obtener la mayor cantidad de dinero?

   Solución:

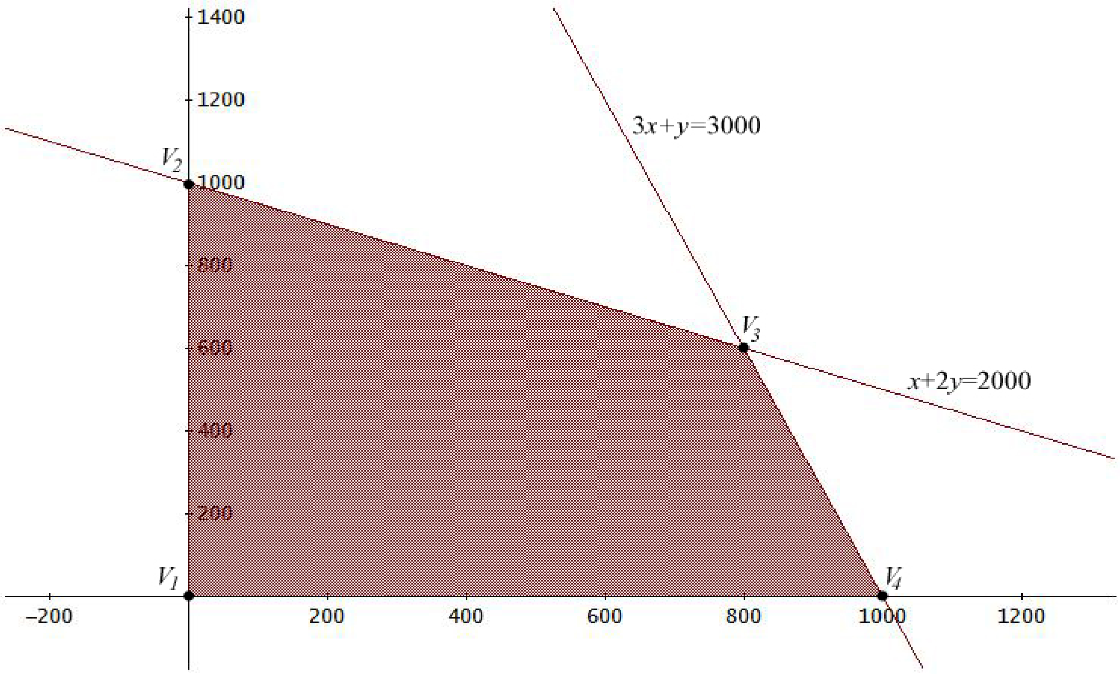
   a) Los datos del enunciado se pueden resumir en la siguiente tabla:

	Bolsas de ajo	Botellas de aceite	Precio (en euros)
Lote tipo A	3	1	50
Lote tipo B	1	2	80
Existencias	3000	2000	

Si llamamos x a los lotes de tipo A e y a los lotes de tipo B que se han de preparar para obtener la mayor cantidad de dinero z, el problema se reduce a maximizar la función $z = 50x + 80y$ sujeta a las siguientes restricciones:

$$\begin{cases} 3x + y \leqslant 3000 \\ x + 2y \leqslant 2000 \\ x \geqslant 0 \\ y \geqslant 0 \end{cases}$$

La región factible asociada a las restricciones anteriores es la que aparece en la página siguiente:



b) Los vértices responden a los puntos de corte de las rectas correspondientes (ver figura anterior). De este modo:

- El corte entre los dos ejes de coordenadas es $V_1 = (0, 0)$.
- El corte entre el eje Y y la recta $x + 2y = 2000$ es $V_2 = (0, 1000)$.
- El corte entre la recta $3x + y = 3000$ y la recta $x + 2y = 2000$ es $V_3 = (800, 600)$.
- El corte entre la recta $3x + y = 3000$ y el eje X es $V_4 = (1000, 0)$.

Veamos los valores que toma la función objetivo $z = 50x + 80y$ en cada uno de los vértices:

- El el vértice $V_1 = (0, 0)$: $z = 50 \cdot 0 + 80 \cdot 0 \Rightarrow z = 0$.
- El el vértice $V_2 = (0, 1000)$: $z = 50 \cdot 0 + 80 \cdot 1000 \Rightarrow z = 80000$.
- El el vértice $V_3 = (800, 600)$: $z = 50 \cdot 800 + 80 \cdot 600 \Rightarrow z = 88000$.
- El el vértice $V_4 = (1000, 0)$: $z = 50 \cdot 1000 + 80 \cdot 0 \Rightarrow z = 50000$.

Por tanto la solución óptima se encuentra en el vértice $V_3 = (800, 600)$, es decir, la mayor cantidad de dinero (88000 euros) se obtiene si se preparan 800 lotes de tipo A y 600 lotes de tipo B.

2. Una empresa fabrica tres modelos de lavadoras: A, B y C.
Para fabricar el modelo A se necesitan 3 horas de trabajo en la unidad de montaje, 2 horas en la unidad de acabado y 1 hora en la unidad de comprobación.
Para fabricar el modelo B se necesitan 4 horas de trabajo en la unidad de montaje, 2 horas de trabajo en la unidad de acabado y 1 hora en la unidad de comprobación.
Para fabricar el modelo C se necesitan 2 horas en la unidad de montaje, 1 hora de trabajo en la unidad de acabado y 1 hora de trabajo en la unidad de comprobación.
Sabiendo que se han empleado 430 horas en la unidad de montaje, 240 horas en la unidad de acabado y 150 horas en la unidad de comprobación, se pide:

a) Plantea el sistema que permita saber cuántas lavadoras de cada modelo se han fabricado.

b) Resuelve el sistema planteado.

Solución:

a) Llamemos x, y, z al número de lavadoras fabricadas del tipo A, B y C, respectivamente. Entonces el sistema que permitirá saber cuántas lavadora de cada modelo se han fabricado es, según el enunciado del problema, el siguiente:

$$\begin{cases} 3x + 4y + 2z = 430 \\ 2x + 2y + z = 240 \\ x + y + z = 150 \end{cases}$$

Obsérvese que cada ecuación responde, respectivamente, al número total de horas empleado para fabricar todas las lavadoras de cada uno de los tres modelos, en las unidades de montaje, acabado y comprobación.

b) La expresión matricial del sistema anterior es:

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 & 430 \\ 2 & 2 & 1 & 240 \\ 1 & 1 & 1 & 150 \end{pmatrix}$$

Aplicando el método de Gauss:

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 & 430 \\ 2 & 2 & 1 & 240 \\ 1 & 1 & 1 & 150 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ 3f_2 - 2f_1 \\ 3f_3 - f_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 & 430 \\ 0 & -2 & -1 & -140 \\ 0 & -1 & 1 & 20 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ 2f_3 - f_2 \end{matrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 & 430 \\ 0 & -2 & -1 & -140 \\ 0 & 0 & 3 & 180 \end{pmatrix}$$

Entre las matrices se especifican las operaciones realizadas, donde f_1, f_2 y f_3 son abreviaturas de fila 1, fila 2 y fila 3, respectivamente. El objetivo es obtener dos ceros por debajo del elemento a_{11} de la matriz, y un cero por debajo del elemento a_{22}. De este modo se

obtendrá un sistema asociado de tipo escalonado (aquel que tiene todo ceros bajo la diagonal principal). Estos sistemas son muy fáciles de resolver.
Obsérvese que, con las operaciones realizadas, el método ha finalizado pues ya hemos conseguido que todos los elementos de la matriz bajo la diagonal principal sean cero. El sistema asociado a esta última matriz es:

$$\begin{cases} 3x + 4y + 2z = 430 \\ -2y - z = -140 \\ 3z = 180 \end{cases}$$

De aquí es fácil despejar las tres incógnitas:

$$z = 60 \quad y = 40 \quad x = 50$$

Por tanto se han fabricado 50 lavadoras del tipo A, 40 lavadoras de tipo B y 60 lavadoras del tipo C.

3. Dada la función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, calcula los valores de las constantes a, b y c para que la gráfica de la función pase por el punto $(0,4)$, tenga un mínimo relativo en el punto de abscisa $x = -1$, y un punto de inflexión en $x = -2$.
Solución:
Como la función pasa por el punto $(0,4)$, tenemos que:

$$f(0) = 4 \Leftrightarrow 0^3 + a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = 4 \Leftrightarrow c = 4$$

La derivada de la función f es $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$. Como la función tiene un mínimo relativo en el punto de abscisa $x = -1$, se tiene que:

$$f'(-1) = 0 \Leftrightarrow 3(-1)^2 + 2a(-1) + b = 0 \Leftrightarrow -2a + b = -3$$

La derivada segunda de la función f es $f''(x) = 6x + 2a$. Como la función tiene un punto de inflexión en $x = -2$, entonces:

$$f''(-2) = 0 \Leftrightarrow 6(-2) + 2a = 0 \Leftrightarrow -12 + 2a = 0 \Leftrightarrow 2a = 12 \Leftrightarrow a = 6$$

Sustituyendo en la igualdad anterior:

$$-2a + b = -3 \Leftrightarrow -2 \cdot 6 + b = -3 \Leftrightarrow -12 + b = -3 \Leftrightarrow b = 9$$

4. Se considera la función $f(x) = \begin{cases} x^2 - x + t & \text{si} \quad x \leqslant 2 \\ (x-3)^2 + 1 & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$. Se pide:

   a) Halla el valor de t para que f sea continua en $x = 2$.

   b) Para $t = 0$ representa gráficamente la función.

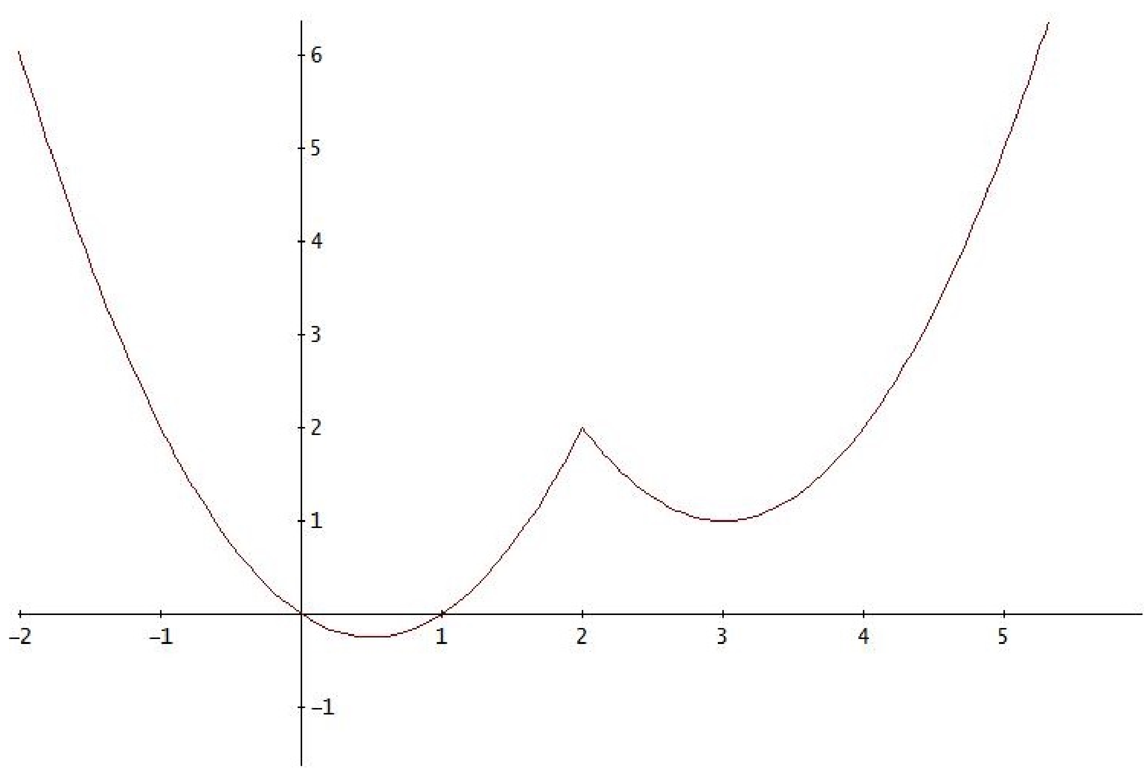
Solución:

a) Para que f sea continua en $x = 2$ se debe cumplir que $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = f(2)$. Además, para que exista el límite anterior deben existir los límites laterales cuando x tiende a 2, y ser iguales:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} (x^2 - x + t) = 2 + t = f(2) \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} \Big((x-3)^2 + 1\Big) = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow 2 + t = 2 \Rightarrow t = 0$$

Por tanto, para que f sea continua en $x = 2$, ha de ser $t = 0$.

b) La gráfica de la función para $t = 0$ es la siguiente:



5. En una empresa se producen dos tipos de muebles: A y B, en una proporción de 2 a 3, respectivamente. La probabilidad de que un mueble de tipo A sea defectuoso es 0,05 y de que un mueble de tipo B sea defectuoso es 0,1.

   a) Elegido un mueble al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea defectuoso?

   b) Se escoge al azar un mueble y resulta no defectuoso, ¿cuál es la probabilidad de que sea del tipo B?

   Solución:
   Llamemos A al suceso "elegido un mueble al azar, que sea del tipo A", B al suceso "elegido un mueble al azar, que sea del tipo B" y D al suceso "elegido un mueble al azar, que sea defectuoso". Como la producción de muebles del tipo A y del tipo B se hace en una proporción de 2 a 3, entonces $P(A) = \frac{2}{5} = 0{,}4$, $P(B) = \frac{3}{5} = 0{,}6$. Además, como la probabilidad de que un mueble del tipo A sea defectuoso es 0,05 y de que un mueble del tipo B sea defectuoso es 0,1, tenemos que $P(D/A) = 0{,}05$ y $P(D/B) = 0{,}1$.
   Para entender adecuadamente la notación en las probabilidades anteriores, es conveniente observar que el suceso "elegido un mueble al azar del tipo A, que sea defectuoso" es el mismo suceso que "el mueble elegido al azar es defectuoso condicionado a que el mueble es del tipo A", abreviadamente D/A. Análogamente D/B es el suceso "el mueble elegido al azar es defectuoso condicionado a que el mueble es del tipo B".

   a) Sea D el suceso "elegido un mueble al azar, que sea defectuoso". Este suceso es la unión de los sucesos "ser defectuoso y del tipo A" y "ser defectuoso y del tipo B". Simbólicamente se escribe $D = (D \cap A) \cup (D \cap B)$. Los sucesos $D \cap A$ y $D \cap B$ son incompatibles, pues ningún mueble defectuoso puede ser simultáneamente del tipo A y del tipo B. Entonces, puesto que la probabilidad de la unión de sucesos incompatibles es la suma de las probabilidades de cada uno de ellos:

   $$P(D) = P\left[(D \cap A) \cup (D \cap B)\right] = P(D \cap A) + P(D \cap B)$$

   Además, haciendo uso de la definición de probabilidad condicionada, según la cual, para dos sucesos X e Y cualesquiera $P(X/Y) = \dfrac{P(X \cap Y)}{P(Y)} \Rightarrow P(X \cap Y) = P(Y) \cdot P(X/Y)$, tenemos:

   $$P(D) = P(D \cap A) + P(D \cap B) = P(A) \cdot P(D/A) + P(B) \cdot P(D/B) =$$

   $$= 0{,}4 \cdot 0{,}05 + 0{,}6 \cdot 0{,}1 = 0{,}08$$

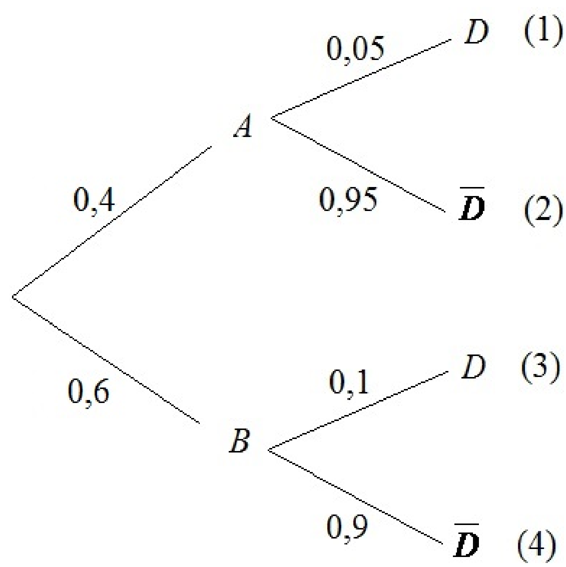
   Esta última igualdad se conoce con el nombre de **teorema de la probabilidad total**.

b) Escribiremos $\overline{D}$ al suceso “elegido un mueble al azar, que no sea defectuoso”. Entonces lo que se pide es la probabilidad del suceso $B/\overline{D}$:

$$P(B/\overline{D}) = \frac{P(B\cap\overline{D})}{P(\overline{D})} = \frac{P(\overline{D}/B)\cdot P(B)}{1-P(D)} = \frac{0{,}9\cdot 0{,}6}{1-0{,}08} = \frac{0{,}54}{0{,}92} = 0{,}587$$

Ahora hemos utilizado el **teorema de Bayes**.

También podríamos haber hecho el ejercicio utilizando un diagrama de árbol:



Los números encima que aparecen sobre cada rama corresponden a probabilidades de sucesos:

- Las de la primera ramificación son probabilidades de los sucesos A y B: $P(A) = 0{,}4$ y $P(B) = 0{,}6$.
- Las de la segunda ramificación son probabilidades condicionadas por los sucesos de la primera ramificación: $P(D/A) = 0{,}05$, $P(\overline{D}/A) = 0{,}95$, $P(D/B) = 0{,}1$ y $P(\overline{D}/B) = 0{,}9$.

Para hallar la probabilidad de la intersección de dos sucesos basta multiplicar las probabilidades correspondientes a cada una de las ramificaciones correspondientes. Así:

$$P(D) = P(D\cap A) + P(D\cap B) = P((1)) + P((3)) = 0,4\cdot 0,05 + 0,6\cdot 0,1 = 0,02 + 0{,}06 = 0{,}08$$

$$P(B/\overline{D}) = \frac{P(B\cap\overline{D})}{P(\overline{D})} = \frac{P(B\cap\overline{D})}{P(A\cap\overline{D}) + P(B\cap\overline{D})} = \frac{P((4))}{P((2)) + P((4))} = \frac{0{,}6\cdot 0{,}9}{0{,}4\cdot 0{,}95 + 0{,}6\cdot 0{,}9} = 0{,}587$$

6. Se estudió el cociente intelectual de 10 estudiantes de 2º de Bachillerato elegidos aleatoriamente de un determinado centro escolar, siendo estos valores: 80, 96, 87, 104, 105, 99, 112, 89, 90 y 110. Sabiendo que el cociente intelectual se distribuye según una normal con desviación típica 15. Se pide:

   a) Halla el intervalo de confianza al nivel del 95 % para la media del cociente intelectual de los estudiantes de 2º de Bachillerato de dicho centro escolar.

   b) Razona y explica qué se podría hacer para que el intervalo de confianza tuviera menor amplitud con el mismo nivel de confianza.

z	**0.00**	**0.01**	**0.02**	**0.03**	**0.04**	**0.05**	**0.06**	**0.07**	**0.08**	**0.09**
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767

Solución:
Según el enunciado, el tamaño de la muestra es $n = 10$, y la desviación típica es $\sigma = 15$. Por otro lado, con los datos proporcionados, tenemos que la media de la muestra dada es

$$\overline{x} = \frac{80 + 96 + 87 + 104 + 105 + 99 + 112 + 89 + 90 + 110}{10} = 97{,}2$$

a) El intervalo de confianza para el cociente intelectual medio viene dado por

$$\left(\overline{x} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \overline{x} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

El valor crítico $z_{\alpha/2}$ es aquel que cumple, sobre la distribución normal estándar, que

$$P\left(Z \leqslant z_{\alpha/2}\right) \leqslant 1 - \frac{\alpha}{2}$$

A un nivel de confianza del 95 % se tiene que:

$$1 - \alpha = 0{,}95 \Rightarrow \alpha = 1 - 0{,}95 \Rightarrow \alpha = 0{,}05 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0{,}025 \Rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0{,}975$$

Entonces hemos de buscar en la tabla de la distribución normal estándar, un valor $z_{\alpha/2}$ tal que $P\left(Z \leqslant z_{\alpha/2}\right) \leqslant 0{,}975$. Esto se cumple exactamente para $z_{\alpha/2} = 1{,}96$. Así pues, el intervalo de confianza para el gasto medio poblacional es:

$$\left(97{,}2 - 1{,}96\frac{15}{\sqrt{10}},\ 97{,}2 - 1{,}96\frac{15}{\sqrt{10}}\right) = (97{,}2 - 9{,}297,\ 97{,}2 + 9{,}297) = (87{,}903,\ 106{,}497)$$

b) Para disminuir la amplitud del intervalo con el mismo nivel de confianza, lo que hemos de hacer es aumentar el tamaño de la muestra. Es decir, tomando $n' \geqslant n$, entonces:

$$\sqrt{n'} \geqslant \sqrt{n} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{n'}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}} \Rightarrow z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n'}} \leqslant z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Por tanto, en el intervalo de confianza, restaríamos y sumaríamos a la media una cantidad menor, lo que haría que la amplitud del intervalo disminuyese.