Pruebas de Acceso a Enseñanzas Universitarias Oficiales de Grado (PAEG)
Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales II - Septiembre 2012 - Propuesta A

1. Queremos realizar una inversión en dos tipos de acciones con las siguientes condiciones. Lo invertido en las acciones de tipo A no puede superar los 10000 euros. Lo invertido en las acciones de tipo B no puede superar los 8000 euros. La suma de la cantidad invertida en A y de la cantidad invertida en B no puede exceder de 15000 euros. La rentabilidad esperada para las acciones de tipo A es del 1 % y la esperada para la acciones de tipo B es del 5 %.

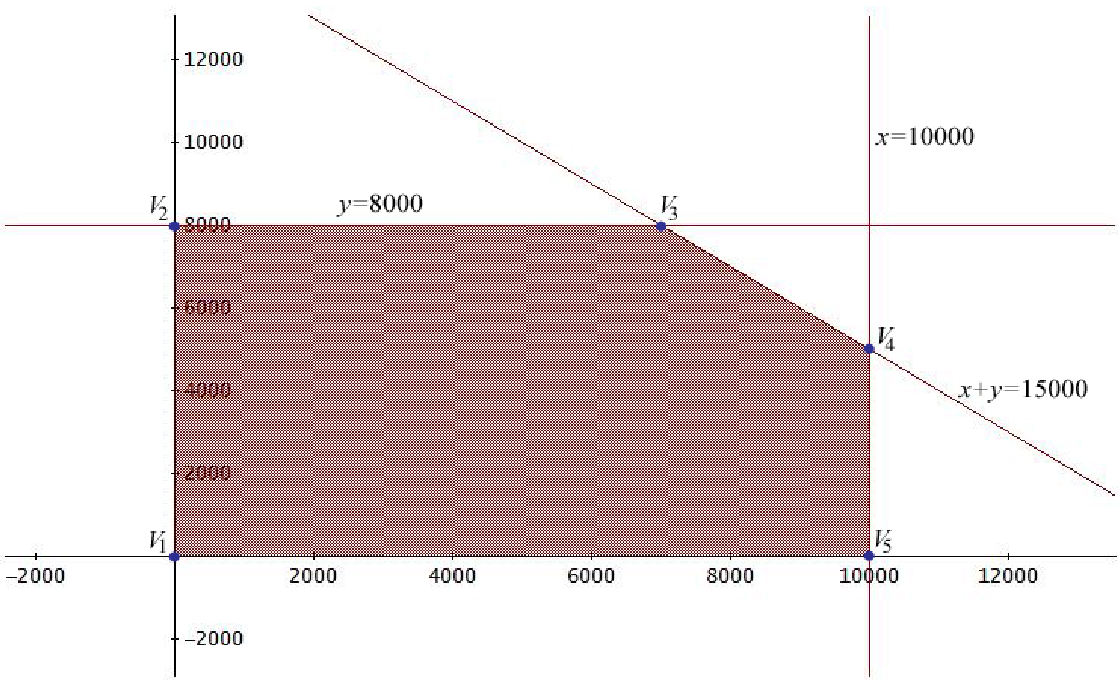
   a) Dibuja la región factible.

   b) Determina la cantidad que debemos invertir en cada uno de los dos tipos de acciones para que, con las condiciones expuestas, el beneficio sea máximo.

   Solución: Llamemos x e y al dinero en euros invertido en las acciones de tipo A y B, respectivamente. El enunciado del problema fija las siguientes restricciones:

$$\begin{cases} x \leqslant 10000 \\ y \leqslant 8000 \\ x + y \geqslant 15000 \end{cases}$$

   a) La región factible asociada a las restricciones anteriores es la siguiente:



b) Los vértices de la región factible responden a los puntos de corte de las rectas correspondientes (ver figura anterior). De este modo:

- El corte entre los dos ejes de coordenadas es $V_1 = (0, 0)$.
- El corte entre el eje Y y la recta $y = 8000$ es $V_2 = (0, 8000)$.
- El corte entre la recta $x + y = 15000$ y la recta $y = 8000$ es $V_3 = (7000, 8000)$.
- El corte entre la recta $x + y = 15000$ y la recta $x = 10000$ es $V_4 = (10000, 5000)$.
- El corte entre la recta $x = 10000$ y el eje X es $V_5 = (10000, 0)$.

El beneficio o rentabilidad de las acciones viene dado por la función $z = 0{,}01x + 0{,}05y$. Dicho beneficio, en cada uno de los vértices, es el siguiente:

- El el vértice $V_1 = (0, 0)$: $z = 0{,}01 \cdot 0 + 0{,}05 \cdot 0 \Rightarrow z = 0$.
- El el vértice $V_2 = (0, 8000)$: $z = 0{,}01 \cdot 0 + 0{,}05 \cdot 8000 \Rightarrow z = 400$.
- El el vértice $V_3 = (7000, 8000)$: $z = 0{,}01 \cdot 7000 + 0{,}05 \cdot 8000 \Rightarrow z = 470$.
- El el vértice $V_4 = (10000, 5000)$: $z = 0{,}01 \cdot 10000 + 0{,}05 \cdot 5000 \Rightarrow z = 500$.
- El el vértice $V_5 = (10000, 0)$: $z = 0{,}01 \cdot 10000 + 0{,}05 \cdot 0 \Rightarrow z = 100$.

Por tanto la solución óptima se encuentra en el vértice $V_4 = (10000, 5000)$, es decir, la mayor rentabilidad (500 euros) se obtiene si se invierten 10000 euros en acciones del tipo A y 5000 euros en acciones del tipo B.

2. Un grupo de estudiantes, para financiar su viaje de fin de curso, vende para el día de San Valentín claveles amarillos, blancos y rojos, por un importe de 1, 2 y 3 euros respectivamente. Han vendido 900 claveles en total y han recaudado 1600 euros, siendo el número de claveles blancos vendidos la mitad del total de rojos y amarillos.

   a) Plantea el correspondiente sistema de ecuaciones que permita saber cuántos claveles de cada color han vendido.

   b) Resuelve el sistema planteado en el apartado anterior.

Solución:

a) Llamemos x, y, z, respectivamente, al número de claveles amarillos, blancos y rojos vendidos. Los datos que se dan en el enunciado del problema se pueden plantear mediante el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x+y+z=900 \\ x+2y+3z=1600 \\ y=\dfrac{x+z}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=900 \\ x+2y+3z=1600 \\ x-2y+z=0 \end{cases}$$

b) La expresión matricial del sistema anterior es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 900 \\ 1 & 2 & 3 & 1600 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Aplicando el método de Gauss:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 900 \\ 1 & 2 & 3 & 1600 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ f_2-2f_1 \\ f_3-f_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 900 \\ 0 & 1 & 2 & 700 \\ 0 & -3 & 0 & -900 \end{pmatrix} c_2 \rightleftarrows c_3 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 900 \\ 0 & 2 & 1 & 700 \\ 0 & 0 & -3 & -900 \end{pmatrix}$$

Entre las matrices se especifican las operaciones realizadas, donde f_1, f_2 y f_3 son abreviaturas de fila 1, fila 2 y fila 3, respectivamente, y c_2, c_3 son las abreviaturas de columna 2 y columna 3, respectivamente. El objetivo es obtener dos ceros por debajo del elemento a_{11} de la matriz, y un cero por debajo del elemento a_{22}. De este modo se obtendrá un sistema asociado de tipo escalonado (aquel que tiene todo ceros bajo la diagonal principal). Estos sistemas son muy fáciles de resolver.

Obsérvese que, con las operaciones realizadas, el método ha finalizado pues ya hemos conseguido que todos los elementos de la matriz bajo la diagonal principal sean cero. El sistema asociado a esta última matriz es:

$$\begin{cases} x + z + y = 900 \\ 2z + y = 700 \\ -3y = -900 \end{cases}$$

De aquí es fácil despejar las tres incógnitas (hay que tener cuidado con el intercambio de las columnas 2 y 3, pues se intercambian también las incógnitas correspondientes: y, z).

$$y = 300 \quad z = 280 \quad x = 320$$

Por tanto se han vendido 320 claveles amarillos, 300 claveles blancos y 280 claveles rojos.

3. La función $G(t) = t^2 - 8t + 20$, $0 \leqslant t \leqslant 6$, representa las ganancias, en miles de euros, de una empresa durante los últimos 6 meses, siendo t el tiempo medido en meses.

   a) ¿Cuál fue la ganancia obtenida en el segundo mes ($t = 2$)?

   b) ¿Cuándo la ganancia obtenida fue mínima? ¿Cuál fue su valor?

   Solución:

   a) Para obtener la ganancia obtenida en el segundo mes basta evaluar la función G en el punto $t = 2$:
   $$G(2) = 2^2 - 8 \cdot 2 + 20 = 4 - 16 + 20 = 8$$
   Por tanto la ganancia obtenida en el segundo mes es de 8000 euros.

   b) Los posibles extremos relativos (llamados a veces puntos singulares o críticos) se encuentran entre aquellos valores que anulan la derivada de la función:
   $$G'(t) = 0 \Leftrightarrow 2t - 8 = 0 \Leftrightarrow 2t = 8 \Leftrightarrow t = 4$$
   Para saber si el valor $t = 4$ es un máximo o un mínimo relativo, lo evaluamos en la segunda derivada. Si el valor numérico obtenido es mayor que cero, $t = 4$ será un mínimo; si es menor que cero, $t = 4$ será un máximo.
   $$G''(t) = 2 \Rightarrow G''(4) = 2 > 0$$
   Entonces $t = 4$ es un mínimo relativo. La ganancia obtenida en este punto se sabe sustituyendo $t = 4$ en la función original.
   $$G(4) = 4^2 - 8 \cdot 4 + 20 = 16 - 32 + 20 = 4$$
   Para confirmar si esta es la ganancia mínima debemos evaluar la función en los extremos del intervalo ($t = 0$, $t = 6$), pues en estos puntos también es probable encontrar un extremo:
   $$G(0) = 0^2 - 8 \cdot 0 + 20 = 20 \quad ; \quad G(6) = 6^2 - 8 \cdot 6 + 20 = 36 - 48 + 20 = 8$$
   Como ninguno de los dos valores anteriores es inferior a 4, ahora sí que podemos confirmar que la ganancia mínima se obtuvo en el cuarto mes ($t = 4$). El valor de esta ganancia mínima fue de 4000 euros ($G(4) = 4$).

4. Se considera la función $f(x) = \begin{cases} (x+1)^2 - t & \text{si} \quad x \leqslant 0 \\ |x-2| - 3 & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$. Se pide:

   a) Hallar el valor de t para que f sea continua en $x = 0$.

   b) Para $t = 3$, representa gráficamente la función f.

Solución:

a) Para que f sea continua en $x = 0$ se debe cumplir que $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0)$. Además, para que exista el límite anterior deben existir los límites laterales cuando x tiende a 2, y ser iguales:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} \left((x+1)^2 - t\right) = 1 - t = f(0) \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} (|x-2| - 3) = -1 \end{array}\right\} \Rightarrow 1 - t = -1 \Rightarrow t = 2$$

Por tanto, para que f sea continua en $x = 0$, ha de ser $t = 2$.

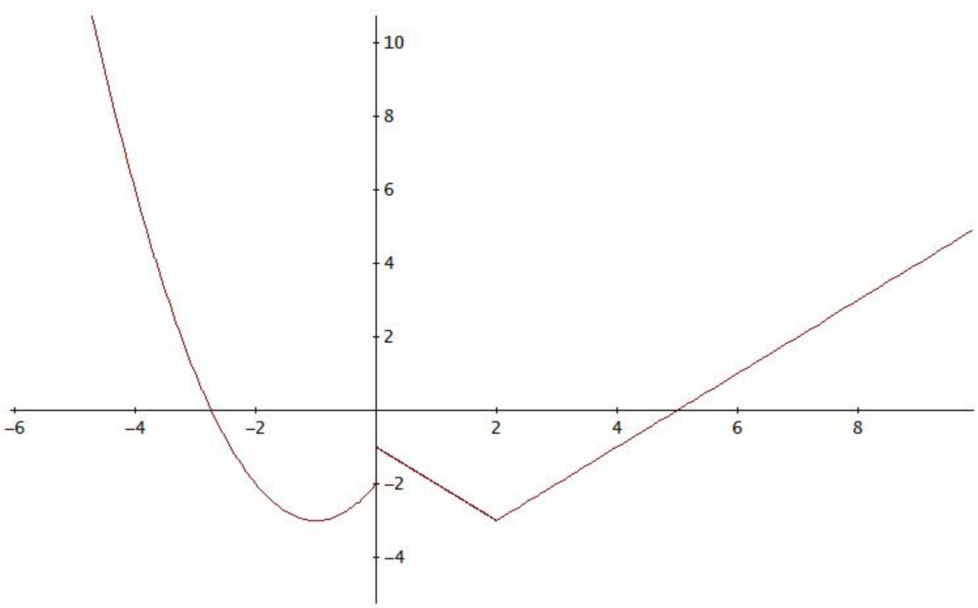
b) En primer lugar vamos a "solucionar" el asunto del valor absoluto. Así escribiremos la función de otra manera equivalente más cómoda para representarla.

$$\begin{cases} |x-2| = x - 2 \Leftrightarrow x - 2 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant 2 \\ |x-2| = -(x-2) = -x + 2 \Leftrightarrow x - 2 < 0 \Leftrightarrow x < 2 \end{cases}$$

Teniendo en cuenta lo anterior la función, para $t = 3$, la podemos escribir así:

$$f(x) = \begin{cases} (x+1)^2 - 3 & si & x \leqslant 0 \\ -x + 2 - 3 & si & 0 < x < 2 \\ x - 2 - 3 & si & x \geqslant 2 \end{cases} = \begin{cases} x^2 + 2x - 2 & si & x \leqslant 0 \\ -x - 1 & si & 0 < x < 2 \\ x - 5 & si & x \geqslant 2 \end{cases}$$

Su representación gráfica es la siguiente:



5. Según un estudio, el 30 % de las familias españolas van al cine regularmente, el 25 % leen regularmente, y el 15 % hacen las dos cosas.

   a) Si elegimos una familia al azar y va al cine regularmente, ¿cuál es la probabilidad de que esa familia lea regularmente?

   b) Se selecciona una familia al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que esa familia vaya al cine o lea regularmente?

   Solución:
   Llamemos C al suceso "elegida una familia al azar, que vaya al cine regularmente" y L al suceso "elegida una familia al azar, que lea regularmente". Los porcentajes que se dan en el enunciado del problema se corresponden con las siguientes probabilidades:

$$P(C) = 0{,}3 \quad ; \quad P(L) = 0{,}25 \quad ; \quad P(C \cap L) = 0{,}15$$

   a) El suceso "elegida una familia al azar que lea regularmente, sabiendo que esa familia va al cine regularmente" es, simbólicamente L/C. Por tanto lo que hemos de hallar es la probabilidad condicionada $P(L/C)$:

$$P(L/C) = \frac{P(L \cap C)}{P(C)} = \frac{0{,}15}{0{,}3} = 0{,}5$$

   b) Lo que se pide es la probabilidad del suceso unión $P(C \cup L)$:

$$P(C \cup L) = P(C) + P(L) - P(C \cap L) = 0{,}3 + 0{,}25 - 0{,}15 = 0{,}4$$

6. Se sabe que "la cantidad de glucosa en la sangre" en individuos adultos y sanos sigue una ley normal de media desconocida y desviación típica 20 mg/dl. Se eligió aleatoriamente una muestra de 100 personas, siendo la media de la cantidad de glucosa en sangre para esta muestra de 85 mg/dl. Se pide:

   a) Halla el intervalo de confianza del 95 % para la media poblacional de "la cantidad de glucosa en sangre".

   b) Discute razonadamente el efecto que tendría sobre el intervalo de confianza el aumento o la disminución del nivel de confianza.

z	**0.00**	**0.01**	**0.02**	**0.03**	**0.04**	**0.05**	**0.06**	**0.07**	**0.08**	**0.09**
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767

Solución:
Según el enunciado, el tamaño de la muestra es $n = 100$, la media de la muestra es $\overline{x} = 85$ y la desviación típica es $\sigma = 20$.

a) El intervalo de confianza para la media poblacional de "la cantidad de glucosa en la sangre" viene dado por

$$\left(\overline{x} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \overline{x} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

El valor crítico $z_{\alpha/2}$ es aquel que cumple, sobre la distribución normal estándar, que

$$P\left(Z \leqslant z_{\alpha/2}\right) \leqslant 1 - \frac{\alpha}{2}$$

A un nivel de confianza del 95 % se tiene que:

$$1 - \alpha = 0{,}95 \Rightarrow \alpha = 1 - 0{,}95 \Rightarrow \alpha = 0{,}05 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0{,}025 \Rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0{,}975$$

Entonces hemos de buscar en la tabla de la distribución normal estándar, un valor $z_{\alpha/2}$ tal que $P\left(Z \leqslant z_{\alpha/2}\right) \leqslant 0{,}975$. Esto se cumple exactamente para $z_{\alpha/2} = 1{,}96$. Así pues, el intervalo de confianza para el gasto medio poblacional es:

$$\left(85 - 1{,}96\frac{20}{\sqrt{100}},\ 85 + 1{,}96\frac{20}{\sqrt{100}}\right) = (85 - 3{,}92,\ 85 + 3{,}92) = (81{,}08,\ 88{,}92)$$

b) El nivel de confianza viene dado por la expresión $1 - \alpha$ y se suele expresar en tanto por ciento: $(1 - \alpha)100\,\%$. En el caso del apartado anterior se ha hallado el intervalo de confianza para un nivel de confianza del 95 %: $1 - \alpha = 0{,}95$. Si aumentamos el nivel de confianza, es decir, si tomamos un nivel de confianza $1 - \alpha'$ mayor que $1 - \alpha$ ocurre lo siguiente:

$$1-\alpha' > 1-\alpha \Leftrightarrow 1-\frac{\alpha'}{2} > 1-\frac{\alpha}{2} \Leftrightarrow z_{\alpha'/2} > z_{\alpha/2} \Leftrightarrow z_{\alpha'/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} > z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Esto quiere decir que si el nivel de confianza es mayor, el intervalo de confianza tiene mayor amplitud, pues se resta y se suma a la media muestral una cantidad mayor. Contrariamente, si el nivel de confianza es menor, disminuirá la amplitud del intervalo de confianza.