UCLM - Pruebas de Acceso a Enseñanzas Universitarias Oficiales de Grado (PAEG)

Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales II – Junio 2014 – Propuesta A

PROPUESTA A. EJERCICIO 1

Enunciado:

Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 0\\ 1 & -3 & 1\\ 0 & 1 & 4\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}-1 & -2\\ 1 & 0\end{pmatrix}$

a) Calcula la matriz $M=(2\cdot I+A)^2$, donde I es la matriz identidad de orden 3.

b) Calcula, si es posible, la matriz X tal que $X\cdot B=I$, donde I es la matriz identidad de orden 2.

Solución:

a) $2\cdot I+A=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2 & 1 & 0\\ 1 & -3 & 1\\ 0 & 1 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 6\end{pmatrix}$

Entonces:

$$M=(2\cdot I+A)^2=(2\cdot I+A)\cdot(2\cdot I+A)=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ -1 & 3 & 5\\ 1 & 5 & 37\end{pmatrix}$$

b) $X\cdot B=I\Rightarrow X\cdot B\cdot B^{-1}=I\cdot B^{-1}\Rightarrow X=B^{-1}$. Hallemos la inversa de la matriz B.

Su determinante es $|B|=\begin{vmatrix}-1 & -2\\ 1 & 0\end{vmatrix}=0-(-2)=2$.

La matriz adjunta de B es $B^d=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 2 & -1\end{pmatrix}$, y la traspuesta de la adjunta de B es $(B^d)^t=\begin{pmatrix}0 & 2\\ -1 & -1\end{pmatrix}$.

Por tanto, la matriz inversa es $B^{-1}=\frac{1}{|B|}(B^d)^t=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & 2\\ -1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$.

Así pues $X=B^{-1}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$.

PROPUESTA A. EJERCICIO 2

Enunciado:

Una empresa de seguros tiene tres sucursales, una en Toledo, otra en Albacete y la tercera en Cuenca. En total entre las tres sucursales vendieron 45 pólizas de seguro del hogar en el último mes. El número de pólizas vendidas en la sucursal de Cuenca es la media aritmética de las vendidas en Toledo y Albacete. Y el número de pólizas vendidas en Toledo es el doble de la cantidad que resulta al restar las vendidas en Albacete menos las vendidas en Cuenca.

a) Plantea el sistema de ecuaciones que nos permita averiguar el número de pólizas de seguro que se han vendido en cada sucursal.
b) Resuelve el sistema planteado en el apartado anterior.

Solución:

Llamemos x, y, z al número de pólizas vendidas en Toledo, Albacete y Cuenca, respectivamente.

a) El sistema que nos permite averiguar el número de pólizas de seguro que se han vendido en cada sucursal es:

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=45 \\ z=\dfrac{x+y}{2} \\ x=2(y-z) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y+z=45 \\ x+y-2z=0 \\ x-2y+2z=0 \end{array}\right\}$$

b) Utilizaremos el método de Gauss para la resolución del sistema. Para ello escribiremos el sistema en forma de matriz y llamaremos f_1 a la primera fila, f_2 a la segunda y f_3 a la tercera.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 45 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \\ f_2-f_1 \\ f_3-f_1 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 45 \\ 0 & 0 & -3 & -45 \\ 0 & -3 & 1 & -45 \end{pmatrix}$$

Obsérvese que se han especificado las operaciones entre filas para obtener cada una de las matrices anteriores.

El sistema asociado a la última matriz es escalonado: $\left\{\begin{array}{r} x+y+z=45 \\ -3z=-45 \\ -3y+z=-45 \end{array}\right.$. Sus soluciones son:

$$z=\frac{-45}{-3} \Rightarrow z=15.$$

$$-3y+15=-45 \Rightarrow -3y=-45+15 \Rightarrow -3y=-30 \Rightarrow y=\frac{-30}{-3} \Rightarrow y=10.$$

$$x+10+15=45 \Rightarrow x+25=45 \Rightarrow x=20.$$

Por tanto se vendieron 20 pólizas en Toledo, 10 pólizas en Albacete y 15 pólizas en Cuenca.

PROPUESTA A. EJERCICIO 3

Enunciado:

Se considera la función $f(x)=\begin{cases}|x-t| & \text{si} \quad x\le 0\\ x^2-2x & \text{si} \quad x>0\end{cases}$

a) ¿Para qué valor de t la función $f(x)$ es continua en $x=0$.

b) Calcula los extremos relativos de la función $f(x)$ en el intervalo $(0,+\infty)$.

c) Calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)$ en $(0,+\infty)$.

Solución:

a) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}|x-t|=|-t|$; $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(x^2-2x\right)=0$. Una de las condiciones para que f sea continua en $x=0$ es que exista el límite en dicho punto, es decir, que el límite por la izquierda de $x=0$ sea igual al límite por la derecha de $x=0$. En este caso, se debe de cumplir que $|-t|=0\Rightarrow t=0$.

Para este valor de t se tiene pues que $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0=f(0)$ y f es continua en $x=0$.

b) En el intervalo $(0,+\infty)$ es $f(x)=x^2-2x$. La derivada de la función para cualquier $x\in(0,+\infty)$ es $f'(x)=2x-2$. Entonces $f'(x)=0\Leftrightarrow 2x-2=0\Leftrightarrow x=1$. Esto quiere decir que el único punto que puede ser extremo relativo es $x=1$. Para decidir estudiemos el signo de la segunda derivada en $x=1$.
Como $f''(x)=2>0$, para todo $x\in(0,+\infty)$, $x=1$ es un mínimo relativo de f en el intervalo $(0,+\infty)$.

c) Estudiemos el signo de la primera derivada.

$f'(x)>0\Leftrightarrow 2x-2>0\Leftrightarrow 2x>2\Leftrightarrow x>1$. Por tanto f es estrictamente creciente en $(1,+\infty)$.

$f'(x)<0\Leftrightarrow 2x-2<0\Leftrightarrow 2x<2\Leftrightarrow x<1$. Por tanto f es estrictamente decreciente en $(0,1)$

PROPUESTA A. EJERCICIO 4

Enunciado:

Calcula los valores de los parámetros a, b y c para que la función $f(x)=ax^4+bx^2+c$ pase por el punto $(0,0)$, tenga un mínimo relativo en el punto de abscisa $x=1$ y el valor de la pendiente de la recta tangente a la curva $y=f(x)$ en $x=2$ sea igual a 24.

Solución:

Como f pasa por el punto $(0,0)$: $f(0)=0\Leftrightarrow a\cdot 0^4+b\cdot 0^2+c=0\Leftrightarrow c=0$. Por otro lado $f'(x)=4ax^3+2bx$. Puesto que en $x=1$ hay un mínimo se tiene que $f'(1)=0\Leftrightarrow 4a+2b=0\Leftrightarrow 2a+b=0$. Y como la pendiente de la recta tangente a la curva en un punto coincide con la derivada en dicho punto, tenemos que $f'(2)=24\Leftrightarrow 32a+4b=24\Leftrightarrow 8a+b=6$. Por tanto obtenemos el sistema $\begin{cases}2a+b=0\\ 8a+b=6\end{cases}$, de donde $\begin{cases}b=-2a\\ b=6-8a\end{cases}$

$\Rightarrow -2a=6-8a\Leftrightarrow 6a=6\Leftrightarrow a=1$. Sustituyendo $b=-2$.

PROPUESTA A. EJERCICIO 5

Enunciado:

En una población, el 40% de los habitantes ven habitualmente la televisión, el 10% lee habitualmente y e 1% ven la televisión y leen habitualmente.

a) Se elige un habitante al azar, ¿cuál es la probabilidad de que vea la televisión o lea habitualmente o ambas cosas?
b) Si elegimos un habitante al azar y ve la televisión habitualmente, ¿cuál es la probabilidad de que lea habitualmente?

Solución:

Llamemos T al suceso "ver habitualmente la televisión" y L al suceso "leer habitualmente". Entonces, según el enunciado, $P(T)=0,4$, $P(L)=0,1$ y $P(T\cap L)=0,01$.

a) El suceso ver la televisión o leer habitualmente o ambas cosas es $T\cup L$. Por tanto:

$$P(T\cup L)=P(T)+P(L)-P(T\cap L)=0,4+0,1-0,01=0,49$$

b) Ahora lo que se pide es la probabilidad $P(L/T)$. Utilizando la fórmula de la probabilidad condicionada, tenemos: $P(L/T)=\dfrac{P(L\cap T)}{P(T)}=\dfrac{0,01}{0,4}=0,025$.

PROPUESTA A. EJERCICIO 6

Enunciado:

Una empresa produce dispositivos electrónicos con pantalla HD. La resolución de estas pantallas sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica $\sigma=20$ píxeles. Se tomó una muestra aleatoria de 100 dispositivos electrónicos y mediante un estudio estadístico se obtuvo el intervalo de confianza $(1076,08,\ 1083,92)$ para la resolución media de las pantallas elegidas al azar.

a) Calcula el valor de la resolución media de las pantallas de los 100 dispositivos electrónicos elegidos para la muestra.
b) Calcula el nivel de confianza con el que se ha obtenido dicho intervalo.
c) ¿Cómo podríamos aumentar o disminuir la amplitud del intervalo? Sin calcular el intervalo de confianza, ¿se podría admitir que la media poblacional sea $\mu=1076,08$ píxeles con un nivel de confianza del 90%. Razona tus respuestas.

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767

Solución:

a) La media de la muestra es el punto medio del intervalo: $\overline{x}=\dfrac{1076,08+1083,92}{2}=1080$.

b) El extremo izquierdo del intervalo de confianza es $\overline{x} - z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$. Entonces:

$$1080 - z_{\alpha/2}\frac{20}{\sqrt{100}} = 1076,08 \Rightarrow 1080 - 1076,08 = 2z_{\alpha/2} \Rightarrow 2z_{\alpha/2} = 3,92 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1,96.$$

A este valor de $z_{\alpha/2}$ le corresponde, según la tabla, una probabilidad igual a $0,975$. Es decir:

$$P\left(Z \leq z_{\alpha/2}\right) = 0,975 \Rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,975 \Rightarrow 2 - \alpha = 1,95 \Rightarrow \alpha = 0,05 \Rightarrow 1 - \alpha = 0,95$$

Por tanto, el nivel de confianza con el que se ha obtenido dicho intervalo es del 95%.

c) Para aumentar la amplitud del intervalo basta con disminuir el tamaño de la muestra y, contrariamente, para disminuir la amplitud del intervalo hemos de aumentar el tamaño de la muestra. Esto es porque el número que restamos a la media muestral para obtener el intervalo de confianza es $z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$. Si n disminuye, $\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$ aumenta y $z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$, con lo que aumentará el valor que hemos de restar y sumar a la media muestral y, por tanto, la amplitud del intervalo será más grande. Cuando n aumenta sucede exactamente lo contrario.

Si el nivel de confianza fuese del 90%, la amplitud del intervalo sería mayor que el intervalo dado al 95% $(1076,08,\ 1083,92)$, ya que se disminuye la confianza en cinco puntos. Por tanto el extremo de la izquierda sería un número menor que $1076,08$. Esto quiere decir que justamente el valor $\mu = 1076,08$ estaría en el interior del intervalo al 90% de confianza y, por tanto, sí que podríamos asumir $\mu = 1076,08$ píxeles como media poblacional.