UCLM - Pruebas de Acceso a Enseñanzas Universitarias Oficiales de Grado (PAEG)

Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales II – Junio 2013 – Propuesta A

PROPUESTA A. EJERCICIO 1

Enunciado:

Considera el siguiente problema de programación lineal:

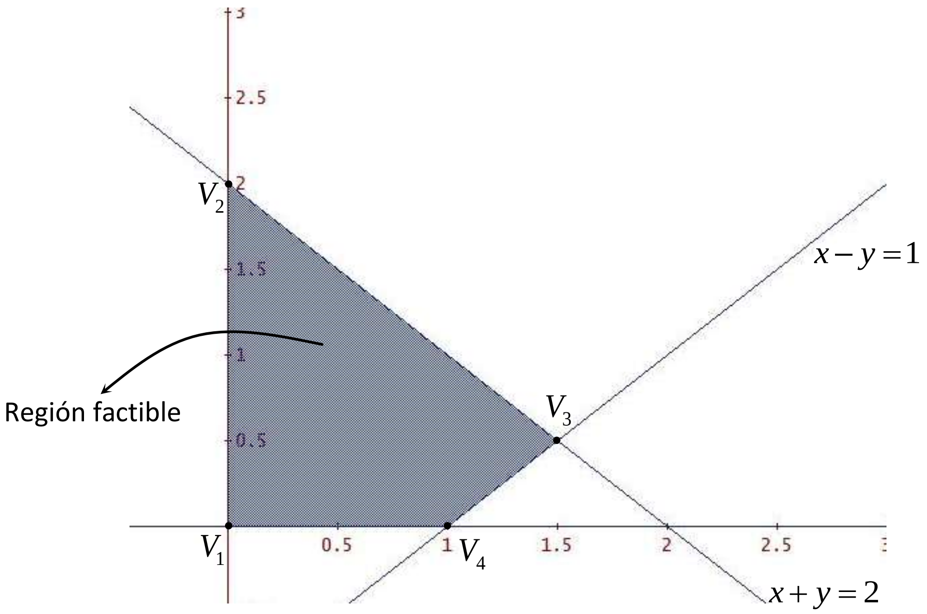
Maximiza la función $z = 2x + y$ sujeta a las siguientes restricciones:

$$\begin{cases} x - y \leq 1 \\ x + y \leq 2 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

a) Dibuja la región factible.
b) Determina los vértices de la región factible.
c) Indica la solución óptima del problema dado y su valor.

Solución:

a)



b) Los vértices responden a los puntos de corte de las rectas correspondientes (ver figura anterior). Así:

- El corte entre los dos ejes de coordenadas es $V_1 = (0,\ 0)$.
- El corte entre el eje Y y la recta $x + y = 2$ es $V_2 = (0,\ 2)$.

- El corte entre la recta $x-y=1$ y la recta $x+y=2$ es $V_3=\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)$
- El corte entre la recta $x-y=1$ y el eje X es $V_4=(1,\ 0)$

c) Veamos los valores que toma la función $z=2x+y$ en cada uno de los vértices:

- En el vértice V_1: $z=2\cdot 0+0\Rightarrow z=0$
- En el vértice V_2: $z=2\cdot 0+2\Rightarrow z=2$
- En el vértice V_3: $z=2\cdot\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\Rightarrow z=\frac{7}{2}=3,5$
- En el vértice V_4: $z=2\cdot 1+0\Rightarrow z=2$

Por tanto la solución óptima se encuentra en el vértice V_3, es decir, para $x=\frac{3}{2}=1,5$ e $y=\frac{1}{2}=0,5$. Su valor, tal y como se ha visto anteriormente, es $z=\frac{7}{2}=3,5$.

Propuesta A. Ejercicio 2

Enunciado:

Para recaudar dinero para el viaje de fin de curso, unos estudiantes han vendido camisetas, bufandas y gorras a 10, 5 y 7 euros, respectivamente. Han recaudado en total 2980 euros. El número total de prendas vendidas ha sido 380. El número de camisetas vendidas fue el doble del número de gorras vendidas.

a) Plantea el sistema de ecuaciones que permita obtener el número de camisetas, bufandas y gorras que se vendieron.

b) Resuelve el sistema planteado en el apartado anterior.

Solución:

Llamemos x, y, z al número de camisetas, bufandas y gorras vendidas, respectivamente.

a) Como las camisetas se han vendido a 10 euros, las bufandas a 5 euros y las gorras a 7 euros, se ha recaudado un total de $10x+5y+7z$ euros, cantidad que debe ser igual al total recaudado. Así: $10x+5y+7z=2980$.

Al haberse vendido un total de 380 prendas se tiene que $x+y+z=380$.

Por último, como el número de camisetas vendidas fue el doble del número de gorras vendidas tenemos que $x=2z$.

Por tanto el sistema que permite obtener el número de camisetas, bufandas y gorras que se vendieron es:

$$\left.\begin{array}{l}10x+5y+7z=2980\\ x+y+z=380\\ x=2z\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}10x+5y+7z=2980\\ x+y+z=380\\ x-2z=0\end{array}\right\}$$

b) Utilizaremos el método de Gauss para la resolución del sistema. Para ello escribiremos el sistema en forma de matriz y llamaremos f_1 a la primera fila, f_2 a la segunda y f_3 a la tercera.

$$\begin{pmatrix} 10 & 5 & 7 & 2980 \\ 1 & 1 & 1 & 380 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \\ 10f_2 - f_1 \\ 10f_3 - f_1 \end{array} \begin{pmatrix} 10 & 5 & 7 & 2980 \\ 0 & 5 & 3 & 820 \\ 0 & -5 & -27 & -2980 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \\ \\ f_3 + f_2 \end{array} \begin{pmatrix} 10 & 5 & 7 & 2980 \\ 0 & 5 & 3 & 820 \\ 0 & 0 & -24 & -2160 \end{pmatrix}$$

Obsérvese que se han especificado las operaciones entre filas para obtener cada una de las matrices anteriores.

El sistema asociado a la última matriz es escalonado: $\begin{cases} 10x+5y+7z=2980 \\ 5y+3z=820 \\ -24z=-2160 \end{cases}$. Sus soluciones son:

$z=\dfrac{-2160}{-24} \Rightarrow z=90$.

$5y+3\cdot 90=820 \Rightarrow 5y+270=820 \Rightarrow 5y=550 \Rightarrow y=\dfrac{550}{5} \Rightarrow y=110$.

$10x+5\cdot 110+7\cdot 90=2980 \Rightarrow 10x+550+630=2980 \Rightarrow 10x=1800 \Rightarrow x=\dfrac{1800}{10} \Rightarrow x=180$.

Por tanto se vendieron 180 camisetas, 110 bufandas y 90 gorras.

PROPUESTA A. EJERCICIO 3

Enunciado:

Se considera la función $f(x)=\begin{cases} |-x-1|-t & \text{si} \quad x\le 2 \\ x-5 & \text{si} \quad x>2 \end{cases}$

a) Halla el valor de t para que f sea continua en $x=2$.

b) Para $t=2$, representa gráficamente la función f.

Solución:

a) $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}\left(|-x-1|-t\right)=|-2-1|-t=3-t$; $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}(x-5)=-3$. Una de las condiciones para que f sea continua en $x=2$ es que exista el límite en dicho punto, es decir, que el límite por la izquierda de $x=2$ sea igual al límite por la derecha de $x=2$. En este caso, se debe de cumplir que $3-t=-3 \Rightarrow -t=-6 \Rightarrow t=6$.

La función queda entonces del siguiente modo: $f(x)=\begin{cases} |-x-1|-6 & \text{si} \quad x\le 2 \\ x-5 & \text{si} \quad x>2 \end{cases}$. Por lo anterior se tiene que

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}\left(|-x-1|-6\right)=-3 \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}(x-5)=-3 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to 2} f(x)=-3=f(2) \text{ y } f \text{ es continua en } x=2.$$

Así, para que f sea continua en $x=2$, debe ser $t=6$.

b) Si $t=2$, la función es $f(x)=\begin{cases} |-x-1|-2 & \text{si} \quad x\le 2 \\ x-5 & \text{si} \quad x>2 \end{cases}$

Escribamos la función de una manera equivalente:

Por un lado $|-x-1|=|-1(x+1)|=|-1|\cdot|x+1|=|x+1|$.

Además:

$|x+1|=x+1 \Leftrightarrow x+1\geq 0 \Leftrightarrow x\geq -1$; $|x+1|=-(x+1)=-x-1 \Leftrightarrow x+1<0 \Leftrightarrow x<-1$.

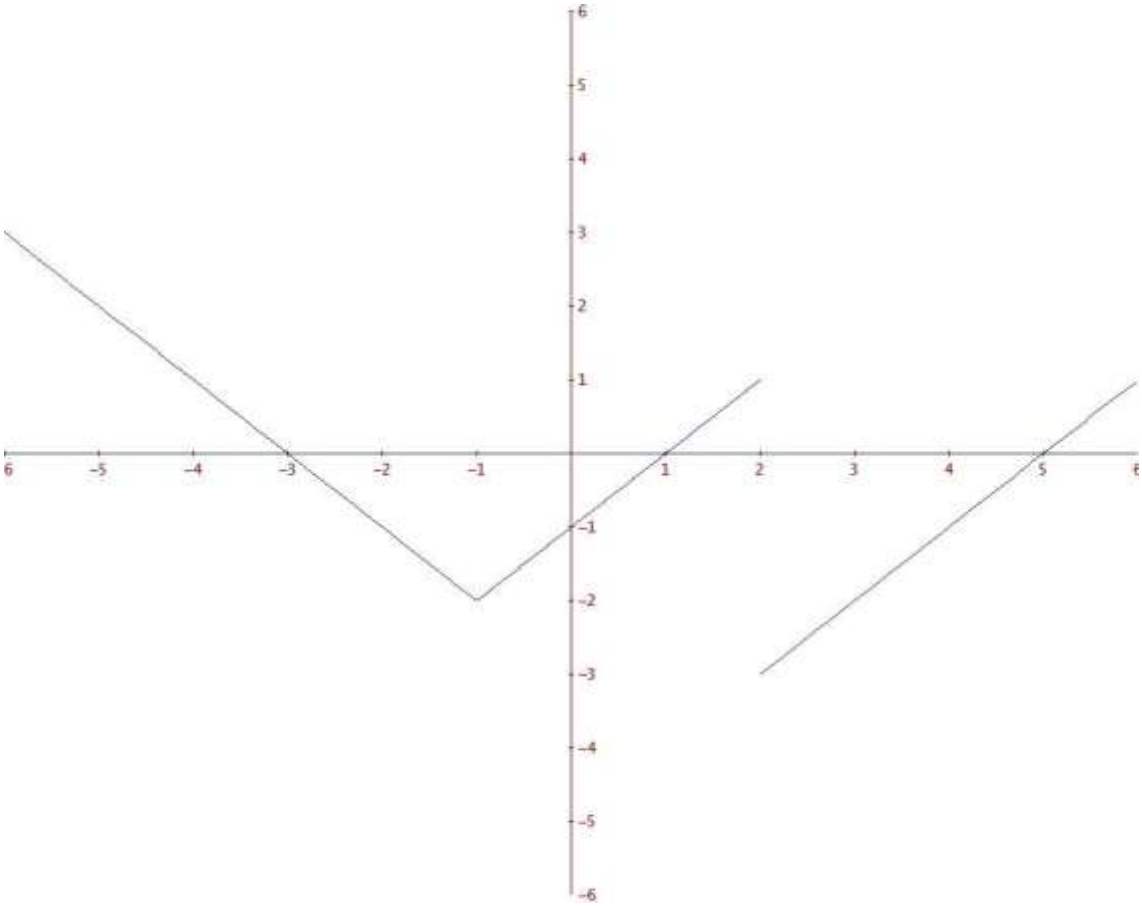
De lo anterior se deduce que:

$|-x-1|-2=x+1-2=x-1 \Leftrightarrow x\geq -1$; $|-x-1|-2=-x-1-2=-x-3 \Leftrightarrow x<-1$

Uniendo estos últimos razonamientos a la ecuación de la función podemos escribir:

$$f(x)=\begin{cases} -x-3 & \text{si} \quad x<-1 \\ x-1 & \text{si} \quad -1\leq x\leq 2 \\ x-5 & \text{si} \quad x>2 \end{cases}$$

Ahora es fácil representarla, pues se trata de tres "trozos" de recta:



También se podría dibujar la función $y=|x+1|$ para $x\leq 2$ y desplazarla dos unidades hacia abajo. Así, de la función inicial quedaría dibujado el primer trozo: $|-x-1|-2=|x+1|-2 \quad \text{si} \quad x\leq 2$.

Propuesta A. Ejercicio 4

Enunciado:

Calcula los valores de los parámetros a y b para que la función $f(x)=x^2+ax+b$ tenga un mínimo en el punto $(2,1)$.

Solución:

$f'(x)=2x+a$. Como $(2,\,1)$ es un mínimo, entonces $f'(2)=0$, es decir:

$2\cdot 2+a=0 \Leftrightarrow 4+a=0 \Leftrightarrow a=-4$.

Como la función pasa por el punto $(2,\,1)$ se tiene que

$f(2)=1 \Leftrightarrow 2^2+a\cdot 2+b=1 \Leftrightarrow 4+2\cdot(-4)+b=1 \Leftrightarrow 4-8+b=1 \Leftrightarrow b=5$.

PROPUESTA A. EJERCICIO 5

Enunciado:

En una empresa se producen dos tipos de piezas: A y B. El 20% son piezas del tipo A y el 80% piezas del tipo B. La probabilidad de que una pieza del tipo A sea defectuosa es 0,02 y de que una pieza de tipo B sea defectuosa es 0,1.

a) Elegida una pieza al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea defectuosa?
b) Se escoge al azar una pieza y resulta no defectuosa, ¿cuál es la probabilidad de que sea del tipo A?

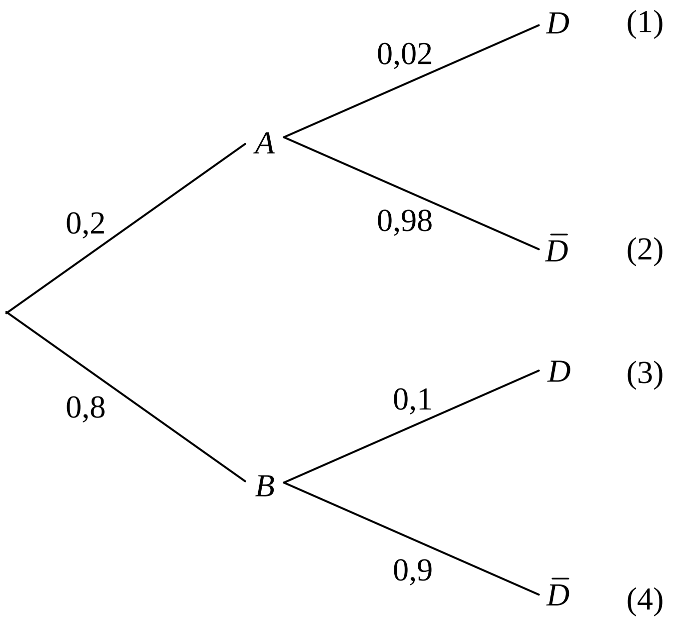
Solución:

Llamemos A al suceso “elegida una pieza al azar, que sea del tipo A” y B al suceso “elegida una pieza al azar, que sea del tipo B”. Llamemos también D al suceso “elegida una pieza al azar, que sea defectuosa”. Entonces $P(A)=0,2$ y $P(B)=0,8$. El enunciado del problema también nos proporciona otras dos probabilidades, condicionadas en este caso: $P(D/A)=0,02$ y $P(D/B)=0,1$

a) Por el teorema de la probabilidad total, la probabilidad de que sea defectuosa es:

$$P(D)=P((D\cap A)\cup(D\cap B))=P(D\cap A)+P(D\cap B)=P(D/A)P(A)+P(D/B)P(B)=$$
$$=0,02\cdot 0,2+0,1\cdot 0,8=0,004+0,08=0,084.$$

Es posible que se vea mejor haciendo un diagrama de árbol:



$$P(D)=(1)+(3)=0,2\cdot 0,02+0,8\cdot 0,1=0,004+0,08=0,084$$

b) Lo que se pide es la probabilidad $P\left(A/\bar{D}\right)$. Aprovecharemos el diagrama de árbol y la probabilidad de que una pieza elegida al azar sea defectuosa, hallada en el apartado anterior.

$$P\left(A/\bar{D}\right)=\frac{P\left(A\cap\bar{D}\right)}{P\left(\bar{D}\right)}=\frac{P\left(A\cap\bar{D}\right)}{1-P\left(D\right)}=\frac{0,2\cdot 0,98}{1-0,084}=\frac{0,196}{0,916}=0,214.$$

PROPUESTA A. EJERCICIO 6

Enunciado:

Se considera una muestra de 10 consumidores mayores de edad, que en las rebajas de invierno gastaron: 65, 72, 74, 75, 80, 81, 82, 84, 87 y 90 euros respectivamente.

a) Sabiendo que el gasto por persona, en las rebajas de invierno, sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica $\sigma=20$ euros, halla un intervalo de confianza para el gasto medio poblacional con un nivel de confianza del 95%.
b) Explica razonadamente cómo podríamos disminuir la amplitud del intervalo con el mismo nivel de confianza.

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767

Solución:

a) La media de la muestra dada es $\bar{x}=\dfrac{65+72+74+75+80+81+82+84+87+90}{10}=\dfrac{790}{10}=79$.

El intervalo de confianza para el gasto medio poblacional viene dado por $\left(\bar{x}-z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \bar{x}+z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$.

El valor crítico $z_{\alpha/2}$ es aquel que cumple, en la distribución normal estándar, $P\left(Z\le z_{\alpha/2}\right)\le 1-\dfrac{\alpha}{2}$.

A un nivel de confianza del 95% tenemos que:

$$1-\alpha=0,95\Rightarrow\alpha=1-0,95\Rightarrow\alpha=0,05\Rightarrow\frac{\alpha}{2}=0,025\Rightarrow 1-\frac{\alpha}{2}=0,975.$$

Entonces hemos de buscar en la tabla un valor $z_{\alpha/2}$ tal que $P\left(Z\le z_{\alpha/2}\right)\le 0,975$. Esto se cumple exactamente para $z_{\alpha/2}=1,96$.

Así pues el intervalo de confianza para el gasto medio poblacional es:

$$\left(79-1,96\frac{20}{\sqrt{10}},\ 79+1,96\frac{20}{\sqrt{10}}\right)=\left(79-12,396,\ 79+12,396\right)=\left(66,604,\ 91,396\right).$$

b) Aumentando el tamaño de la muestra.

Si tomamos $n'\ge n$, entonces $\sqrt{n'}\ge\sqrt{n}\Rightarrow\dfrac{1}{\sqrt{n'}}\le\dfrac{1}{\sqrt{n}}\Rightarrow z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n'}}\le z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

Por tanto, en el intervalo de confianza, restaríamos y sumaríamos a la media $\bar{x}$ una cantidad menor, lo que haría que la amplitud del intervalo disminuyese.