

# UCLM - Pruebas de Acceso a Enseñanzas Universitarias Oficiales de Grado (PAEG)

## Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales II – Junio 2013 – Propuesta A

### PROPUESTA A. EJERCICIO 1

#### Enunciado:

Considera el siguiente problema de programación lineal:

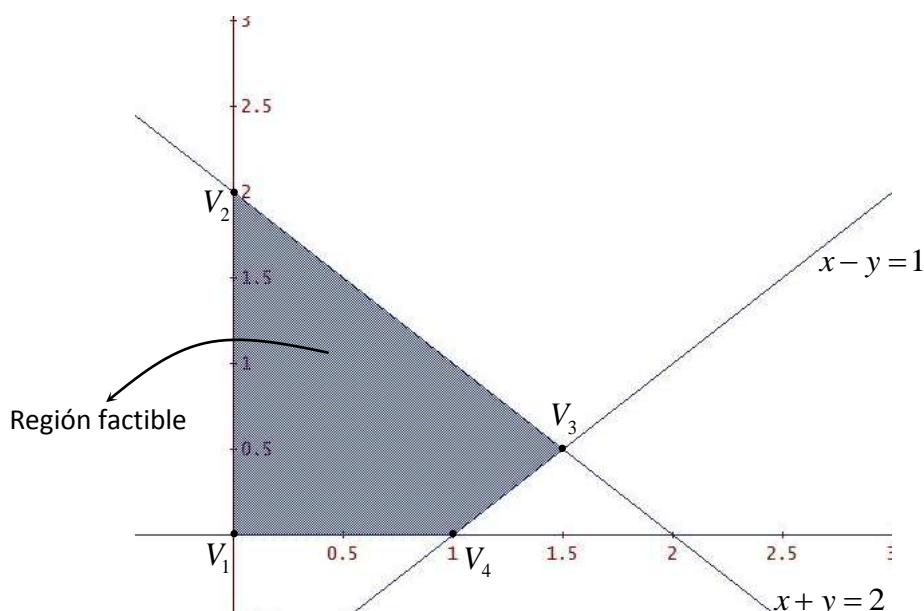
Maximiza la función  $z = 2x + y$  sujeta a las siguientes restricciones:

$$\begin{cases} x - y \leq 1 \\ x + y \leq 2 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

- Dibuja la región factible.
- Determina los vértices de la región factible.
- Indica la solución óptima del problema dado y su valor.

#### Solución:

a)



b) Los vértices responden a los puntos de corte de las rectas correspondientes (ver figura anterior). Así:

- El corte entre los dos ejes de coordenadas es  $V_1 = (0, 0)$ .
- El corte entre el eje  $Y$  y la recta  $x + y = 2$  es  $V_2 = (0, 2)$ .

- El corte entre la recta  $x - y = 1$  y la recta  $x + y = 2$  es  $V_3 = \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$
- El corte entre la recta  $x - y = 1$  y el eje  $X$  es  $V_4 = (1, 0)$

c) Veamos los valores que toma la función  $z = 2x + y$  en cada uno de los vértices:

- En el vértice  $V_1$ :  $z = 2 \cdot 0 + 0 \Rightarrow z = 0$
- En el vértice  $V_2$ :  $z = 2 \cdot 0 + 2 \Rightarrow z = 2$
- En el vértice  $V_3$ :  $z = 2 \cdot \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \Rightarrow z = \frac{7}{2} = 3,5$
- En el vértice  $V_4$ :  $z = 2 \cdot 1 + 0 \Rightarrow z = 2$

Por tanto la solución óptima se encuentra en el vértice  $V_3$ , es decir, para  $x = \frac{3}{2} = 1,5$  e  $y = \frac{1}{2} = 0,5$ . Su valor, tal y como se ha visto anteriormente, es  $z = \frac{7}{2} = 3,5$ .

### PROPUESTA A. EJERCICIO 2

#### **Enunciado:**

Para recaudar dinero para el viaje de fin de curso, unos estudiantes han vendido camisetas, bufandas y gorras a 10, 5 y 7 euros, respectivamente. Han recaudado en total 2980 euros. El número total de prendas vendidas ha sido 380. El número de camisetas vendidas fue el doble del número de gorras vendidas.

- Plantea el sistema de ecuaciones que permita obtener el número de camisetas, bufandas y gorras que se vendieron.
- Resuelve el sistema planteado en el apartado anterior.

#### **Solución:**

Llamemos  $x$ ,  $y$ ,  $z$  al número de camisetas, bufandas y gorras vendidas, respectivamente.

- Como las camisetas se han vendido a 10 euros, las bufandas a 5 euros y las gorras a 7 euros, se ha recaudado un total de  $10x + 5y + 7z$  euros, cantidad que debe ser igual al total recaudado. Así:  $10x + 5y + 7z = 2980$ .

Al haberse vendido un total de 380 prendas se tiene que  $x + y + z = 380$ .

Por último, como el número de camisetas vendidas fue el doble del número de gorras vendidas tenemos que  $x = 2z$ .

Por tanto el sistema que permite obtener el número de camisetas, bufandas y gorras que se vendieron es:

$$\left. \begin{array}{l} 10x + 5y + 7z = 2980 \\ x + y + z = 380 \\ x = 2z \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 10x + 5y + 7z = 2980 \\ x + y + z = 380 \\ x - 2z = 0 \end{array} \right\}$$

- Utilizaremos el método de Gauss para la resolución del sistema. Para ello escribiremos el sistema en forma de matriz y llamaremos  $f_1$  a la primera fila,  $f_2$  a la segunda y  $f_3$  a la tercera.

$$\begin{pmatrix} 10 & 5 & 7 & 2980 \\ 1 & 1 & 1 & 380 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} 10f_2 - f_1 \\ 10f_3 - f_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 10 & 5 & 7 & 2980 \\ 0 & 5 & 3 & 820 \\ 0 & -5 & -27 & -2980 \end{pmatrix} \begin{matrix} f_3 + f_2 \end{matrix} \begin{pmatrix} 10 & 5 & 7 & 2980 \\ 0 & 5 & 3 & 820 \\ 0 & 0 & -24 & -2160 \end{pmatrix}$$

Obsérvese que se han especificado las operaciones entre filas para obtener cada una de las matrices anteriores.

El sistema asociado a la última matriz es escalonado: 
$$\begin{cases} 10x + 5y + 7z = 2980 \\ 5y + 3z = 820 \\ -24z = -2160 \end{cases}$$
 . Sus soluciones son:

$$z = \frac{-2160}{-24} \Rightarrow z = 90.$$

$$5y + 3 \cdot 90 = 820 \Rightarrow 5y + 270 = 820 \Rightarrow 5y = 550 \Rightarrow y = \frac{550}{5} \Rightarrow y = 110.$$

$$10x + 5 \cdot 110 + 7 \cdot 90 = 2980 \Rightarrow 10x + 550 + 630 = 2980 \Rightarrow 10x = 1800 \Rightarrow x = \frac{1800}{10} \Rightarrow x = 180.$$

Por tanto se vendieron 180 camisetas, 110 bufandas y 90 gorras.

### PROPUESTA A. EJERCICIO 3

#### Enunciado:

Se considera la función  $f(x) = \begin{cases} |-x-1|-t & \text{si } x \leq 2 \\ x-5 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

- Halla el valor de  $t$  para que  $f$  sea continua en  $x = 2$ .
- Para  $t = 2$ , representa gráficamente la función  $f$ .

#### Solución:

- a)  $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (|-x-1|-t) = |-2-1|-t = 3-t$  ;  $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x-5) = -3$ . Una de las condiciones para que  $f$  sea continua en  $x = 2$  es que exista el límite en dicho punto, es decir, que el límite por la izquierda de  $x = 2$  sea igual al límite por la derecha de  $x = 2$ . En este caso, se debe de cumplir que  $3-t = -3 \Rightarrow -t = -6 \Rightarrow t = 6$ .

La función queda entonces del siguiente modo:  $f(x) = \begin{cases} |-x-1|-6 & \text{si } x \leq 2 \\ x-5 & \text{si } x > 2 \end{cases}$ . Por lo anterior se tiene que

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (|-x-1|-6) = -3 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x-5) = -3 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = -3 = f(2) \text{ y } f \text{ es continua en } x = 2.$$

Así, para que  $f$  sea continua en  $x = 2$ , debe ser  $t = 6$ .

- b) Si  $t = 2$ , la función es  $f(x) = \begin{cases} |-x-1|-2 & \text{si } x \leq 2 \\ x-5 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

Escribamos la función de una manera equivalente:

Por un lado  $|-x-1| = |-1(x+1)| = |-1| \cdot |x+1| = |x+1|$ .

Además:

$|x+1| = x+1 \Leftrightarrow x+1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -1$  ;  $|x+1| = -(x+1) = -x-1 \Leftrightarrow x+1 < 0 \Leftrightarrow x < -1$ .

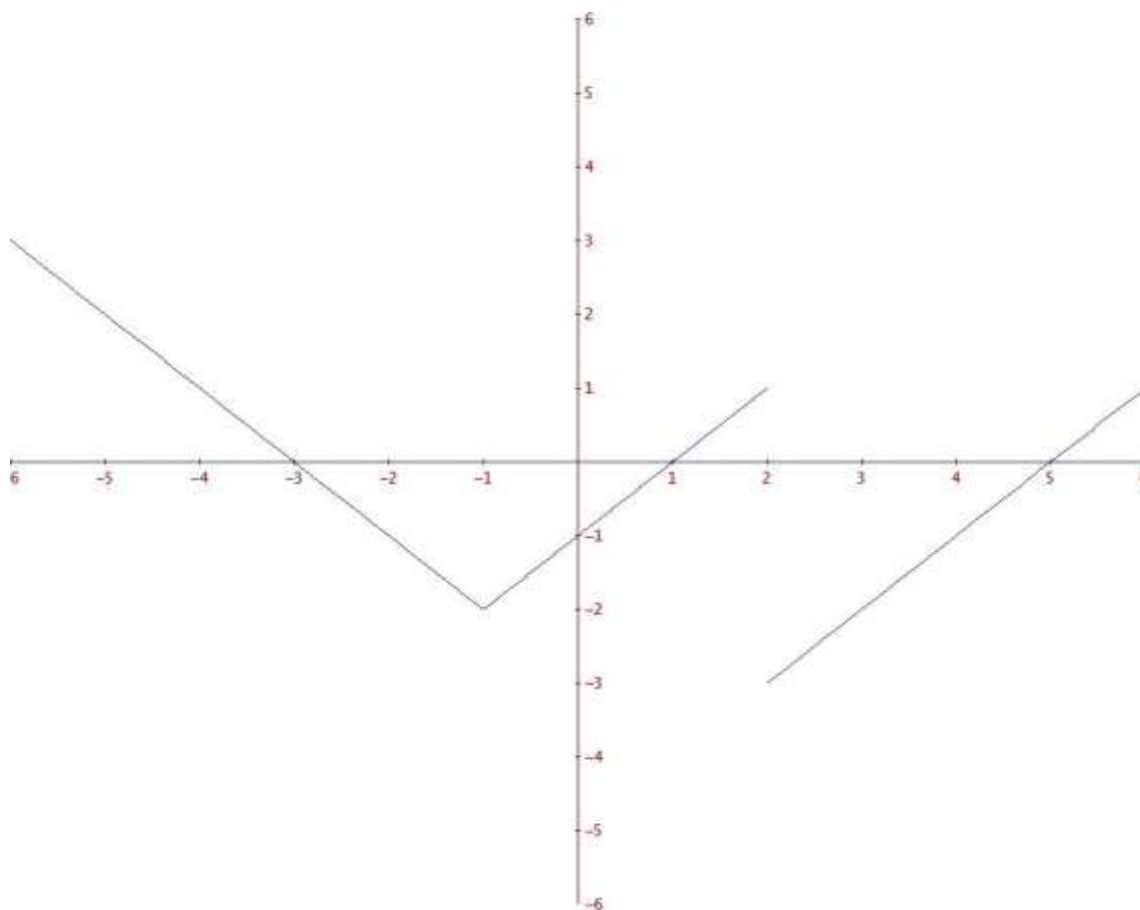
De lo anterior se deduce que:

$|-x-1|-2 = x+1-2 = x-1 \Leftrightarrow x \geq -1$  ;  $|-x-1|-2 = -x-1-2 = -x-3 \Leftrightarrow x < -1$

Uniendo estos últimos razonamientos a la ecuación de la función podemos escribir:

$$f(x) = \begin{cases} -x-3 & \text{si } x < -1 \\ x-1 & \text{si } -1 \leq x \leq 2 \\ x-5 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Ahora es fácil representarla, pues se trata de tres “trozos” de recta:



También se podría dibujar la función  $y = |x+1|$  para  $x \leq 2$  y desplazarla dos unidades hacia abajo. Así, de la función inicial quedaría dibujado el primer trozo:  $|-x-1|-2 = |x+1|-2$  si  $x \leq 2$ .

#### PROPUESTA A. EJERCICIO 4

##### **Enunciado:**

Calcula los valores de los parámetros  $a$  y  $b$  para que la función  $f(x) = x^2 + ax + b$  tenga un mínimo en el punto  $(2, 1)$ .

**Solución:**

$f'(x) = 2x + a$ . Como  $(2, 1)$  es un mínimo, entonces  $f'(2) = 0$ , es decir:

$$2 \cdot 2 + a = 0 \Leftrightarrow 4 + a = 0 \Leftrightarrow a = -4.$$

Como la función pasa por el punto  $(2, 1)$  se tiene que

$$f(2) = 1 \Leftrightarrow 2^2 + a \cdot 2 + b = 1 \Leftrightarrow 4 + 2 \cdot (-4) + b = 1 \Leftrightarrow 4 - 8 + b = 1 \Leftrightarrow b = 5.$$

**PROPUESTA A. EJERCICIO 5**

**Enunciado:**

En una empresa se producen dos tipos de piezas: A y B. El 20% son piezas del tipo A y el 80% piezas del tipo B. La probabilidad de que una pieza del tipo A sea defectuosa es 0,02 y de que una pieza de tipo B sea defectuosa es 0,1.

- a) Elegida una pieza al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea defectuosa?
- b) Se escoge al azar una pieza y resulta no defectuosa, ¿cuál es la probabilidad de que sea del tipo A?

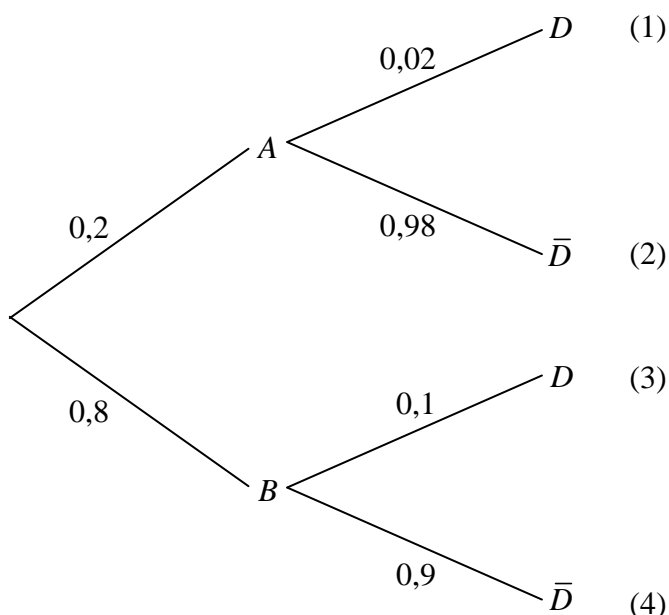
**Solución:**

Llamemos  $A$  al suceso “elegida una pieza al azar, que sea del tipo A” y  $B$  al suceso “elegida una pieza al azar, que sea del tipo B”. Llamemos también  $D$  al suceso “elegida una pieza al azar, que sea defectuosa”. Entonces  $P(A) = 0,2$  y  $P(B) = 0,8$ . El enunciado del problema también nos proporciona otras dos probabilidades, condicionadas en este caso:  $P(D/A) = 0,02$  y  $P(D/B) = 0,1$

- a) Por el teorema de la probabilidad total, la probabilidad de que sea defectuosa es:

$$P(D) = P((D \cap A) \cup (D \cap B)) = P(D \cap A) + P(D \cap B) = P(D/A)P(A) + P(D/B)P(B) = 0,02 \cdot 0,2 + 0,1 \cdot 0,8 = 0,004 + 0,08 = 0,084.$$

Es posible que se vea mejor haciendo un diagrama de árbol:



$$P(D) = (1) + (3) = 0,2 \cdot 0,02 + 0,8 \cdot 0,1 = 0,004 + 0,08 = 0,084$$

- b) Lo que se pide es la probabilidad  $P(A/\bar{D})$ . Aprovecharemos el diagrama de árbol y la probabilidad de que una pieza elegida al azar sea defectuosa, hallada en el apartado anterior.

$$P(A/\bar{D}) = \frac{P(A \cap \bar{D})}{P(\bar{D})} = \frac{P(A \cap \bar{D})}{1 - P(D)} = \frac{0,2 \cdot 0,98}{1 - 0,084} = \frac{0,196}{0,916} = 0,214.$$

**PROPUESTA A. EJERCICIO 6**

**Enunciado:**

Se considera una muestra de 10 consumidores mayores de edad, que en las rebajas de invierno gastaron: 65, 72, 74, 75, 80, 81, 82, 84, 87 y 90 euros respectivamente.

- a) Sabiendo que el gasto por persona, en las rebajas de invierno, sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica  $\sigma = 20$  euros, halla un intervalo de confianza para el gasto medio poblacional con un nivel de confianza del 95%.
- b) Explica razonadamente cómo podríamos disminuir la amplitud del intervalo con el mismo nivel de confianza.

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767

**Solución:**

- a) La media de la muestra dada es  $\bar{x} = \frac{65 + 72 + 74 + 75 + 80 + 81 + 82 + 84 + 87 + 90}{10} = \frac{790}{10} = 79$ .

El intervalo de confianza para el gasto medio poblacional viene dado por  $\left( \bar{x} - z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$ .

El valor crítico  $z_{\alpha/2}$  es aquel que cumple, en la distribución normal estándar,  $P(Z \leq z_{\alpha/2}) \leq 1 - \frac{\alpha}{2}$ .

A un nivel de confianza del 95% tenemos que:

$$1 - \alpha = 0,95 \Rightarrow \alpha = 1 - 0,95 \Rightarrow \alpha = 0,05 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0,025 \Rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,975.$$

Entonces hemos de buscar en la tabla un valor  $z_{\alpha/2}$  tal que  $P(Z \leq z_{\alpha/2}) \leq 0,975$ . Esto se cumple exactamente para  $z_{\alpha/2} = 1,96$ .

Así pues el intervalo de confianza para el gasto medio poblacional es:

$$\left( 79 - 1,96 \frac{20}{\sqrt{10}}, 79 + 1,96 \frac{20}{\sqrt{10}} \right) = (79 - 12,396, 79 + 12,396) = (66,604, 91,396).$$

- b) Aumentando el tamaño de la muestra.

$$\text{Si tomamos } n' \geq n, \text{ entonces } \sqrt{n'} \geq \sqrt{n} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{n'}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \Rightarrow z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n'}} \leq z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

Por tanto, en el intervalo de confianza, restaríamos y sumaríamos a la media  $\bar{x}$  una cantidad menor, lo que haría que la amplitud del intervalo disminuyese.