Pruebas de Acceso a Enseñanzas Universitarias Oficiales de Grado (PAEG)
Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales II - Junio 2012 - Propuesta A

1. a) Despeja la matriz X en la siguiente ecuación matricial: $7 \cdot I - 2 \cdot X + A \cdot X = B$ suponiendo que todas las matrices son cuadradas del mismo orden (I es la matriz identidad).

   b) Si $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$, calcula la matriz X que cumple $A \cdot X = I$, donde I es la matriz identidad de orden 2.

Solución:

a)

$$\begin{array}{rcl} & & 7 \cdot I - 2 \cdot X + A \cdot X = B \\ (1) & \Leftrightarrow & -2IX + AX = B - 7I \\ (2) & \Leftrightarrow & (-2I + A)X = B - 7I \\ (3) & \Leftrightarrow & (-2I + A)^{-1}(-2I + A)X = (-2I + A)^{-1}(B - 7I) \\ (4) & \Leftrightarrow & IX = (-2I + A)^{-1}(B - 7I) \\ (5) & \Leftrightarrow & X = (-2I + A)^{-1}(B - 7I) \end{array}$$

Observaciones:

- En el paso (1) restamos $7I$ a los dos miembros de la igualdad. Además escribiremos $-2 \cdot X$ de la forma $-2IX$ ¿Por qué se hace esto último? Lo veremos a continuación.
- En el paso (2) sacamos X factor común de la expresión $-2IX + AX$ (el factor común X se extrae a la derecha pues a la derecha está en los dos sumandos anteriores). Una vez extraído factor común se tiene $(-2I + A)X$. Ahora adquiere sentido el hecho de haber escrito $-2 \cdot X$ de la forma $-2IX$ ya que así, una vez extraído el factor común, podremos realizar la suma $-2I + A$. Si no lo hubiéramos hecho así, al sacar factor común, nos quedaría la expresión $-2 + A$, expresión que no tiene sentido pues no se puede sumar un número con una matriz cuadrada de orden mayor o igual que dos. Como ves, en realidad, en el ambiente matricial, si k es un número real, entonces $kA = (kI)A = A(kI)$.
- En el paso (3) multiplicamos por la inversa de $-2I + A$ a la izquierda de los dos miembros de la igualdad. Lo hacemos por la izquierda porque $-2I + A$ está multiplicando a X también por la izquierda. Lo que no se puede hacer es multiplicar por la inversa por la izquierda en un miembro y por la derecha en otro (o viceversa). Recuérdese que el producto de matrices no es conmutativo.
- En el paso (4) hemos utilizado que el producto de una matriz cuadrada por su inversa es la matriz identidad. En este caso sí que es cierta la conmutatividad del producto de matrices: $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$

- En el paso (5) se ha utilizado que $I \cdot X = X \cdot I = X$ donde I es la matriz identidad. Digamos que la matriz identidad "juega el mismo papel" en el conjunto de las matrices cuadradas, que el número 1 en el conjunto de los números reales (ambos son el elemento neutro de la multiplicación).

b) Sea $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Entonces:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 7 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Multiplicando las matrices del primer miembro de la igualdad anterior:

$$\begin{pmatrix} 3a & 3b \\ 7a + c & 7b + d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Y de aquí se obtiene:

$$\begin{cases} 3a = 1 \\ 7a + c = 0 \\ 3b = 0 \\ 7b + d = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{3} \\ c = -\frac{7}{3} \\ b = 0 \\ d = 1 \end{cases}$$

Entonces:

$$X = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{7}{3} & 1 \end{pmatrix}$$

2. Los alumnos de 2º de Bachillerato de un centro escolar votan entre los tres posibles destinos para el viaje de fin de curso: Roma, Londres y París. El número total de votos es 120. El número de alumnos que quieren ir a Roma es el triple de la diferencia entre los que quieren ir a París y los que quieren ir a Londres. El número de alumnos que quieren ir a París es la mitad de la suma de los que quieren ir a Roma y a Londres.

   a) Plantea el sistema de ecuaciones que permita saber cuántos alumnos quieren ir a Roma, Londres y París respectivamente.

   b) Resuelve el sistema planteado en el apartado anterior.

Solución:

a) Llamemos x al número de alumnos que quiere ir a Roma, y al número de alumnos que quieren ir a Londres, y z al número de alumnos que quieren ir a París. Entonces el enunciado del problema se puede plantear según el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x+y+z=120 \\ x=3(z-y) \\ z=\dfrac{x+y}{2} \end{cases}$$

b) Operando se puede escribir el sistema anterior de la siguiente forma:

$$\begin{cases} x+y+z=120 \\ x+3y-3z=0 \\ x+y-2z=0 \end{cases}$$

Este sistema, en forma matricial, toma la forma:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 120 \\ 1 & 3 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Aplicando el método de Gauss:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 120 \\ 1 & 3 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ f_2-f_1 \\ f_3-f_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 120 \\ 0 & 2 & -4 & -120 \\ 0 & 0 & -3 & -120 \end{pmatrix}$$

Entre las matrices se especifican las operaciones realizadas, donde f_1, f_2 y f_3 son abreviaturas de fila 1, fila 2 y fila 3, respectivamente. El objetivo es obtener dos ceros por debajo del elemento a_{11} de la matriz, y un cero por debajo del elemento a_{22}. De este modo se

obtendrá un sistema asociado de tipo escalonado (aquel que tiene todo ceros bajo la diagonal principal). Estos sistemas son muy fáciles de resolver.
Obsérvese que, con las operaciones realizadas, el método ha finalizado pues ya hemos conseguido que todos los elementos de la matriz bajo la diagonal principal sean cero. El sistema asociado a esta última matriz es:

$$\begin{cases} x + y + z = 120 \\ 2y - 4z = -120 \\ -3z = -120 \end{cases}$$

De aquí es fácil despejar las tres incógnitas:

$$z = 40 \quad y = 20 \quad x = 60$$

Por tanto hay 60 alumnos que quieren ir a Roma, 20 que quieren ir a Londres, y 40 que quieren ir a París.

3. Se ha registrado el ruido que se produce en una cocina industrial durante 4.5 horas. La función

$$R(t) = t^3 - 9t^2 + 24t + 28$$

representa el ruido medido en decibelios (db) y t el tiempo medido en horas, $0 < t < 4{,}5$.

a) ¿En la primera hora ($t = 1$), cuántos decibelios se registraron?

b) ¿En qué momento se produce mayor ruido? ¿Cuál fue el valor máximo del ruido registrado?

Solución:

a) $R(1) = 1^3 - 9 \cdot 1^2 + 24 \cdot 1 + 28 = 1 - 9 + 24 + 28 = 44$. Por tanto, en la primera hora se registraron 44 decibelios.

b) Vamos a hallar los extremos relativos de la función R. Para ello, en primer lugar, derivamos e igualamos a cero:

$$R'(t) = 3t^2 - 18t + 24 = 0 \Leftrightarrow t^2 - 6t + 8 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 4 \cdot 1 \cdot 8}}{2} = \frac{6 \pm 2}{2} = \begin{cases} t_1 = 4 \\ t_2 = 2 \end{cases}$$

Estos dos valores son los posibles extremos relativos. Para saber si se tratan de máximos o mínimos debemos de evaluarlos en la segunda derivada:

$$R''(t) = 6t - 18 \Rightarrow \begin{cases} R''(4) = 6 > 0 \\ R''(2) = -6 < 0 \end{cases}$$

De lo anterior se deduce que $t_1 = 4$ es un mínimo relativo y $t_2 = 2$ es un máximo relativo de la función R. Por tanto el momento que se produce mayor ruido es cuando han pasado 2 horas. Como $R(2) = 2^3 - 9 \cdot 2^2 + 24 \cdot 2 + 28 = 8 - 36 + 48 + 28 = 48$, el valor máximo del ruido registrado es de 48 decibelios.

Obsérvese que la función está definida en el intervalo abierto $(0,\ 4{,}5)$. Si hubiera estado definida en el cerrado, $[0,\ 4{,}5]$, el valor máximo podría encontrarse en los extremos de éste. Pero $R(0) = 28$ y $R(4{,}5) = (4{,}5)^3 - 9 \cdot (4{,}5)^2 + 24 \cdot (4{,}5) + 28 = 44{,}875$, que en ningún caso son valores mayores al obtenido para $t = 2$, lo que viene a confirmar que, en cualquier caso, el valor máximo de ruido se obtiene pasadas 2 horas.

4. Se considera la función

$$f(x)=\begin{cases} x^2-x & \text{si} \quad x\leqslant 1 \\ (x-2)^2+1 & \text{si} \quad x>1 \end{cases}$$

Se pide:

a) Estudia su continuidad en $x=1$.

b) Extremos relativos en el intervalo $(1,\ 4)$.

c) Intervalos de crecimiento y decrecimiento en $(1,\ \infty)$.

Solución:

a) Si los límites laterales en $x=1$ coinciden y son finitos, existe el límite de la función en $x=1$ y tiene el mismo valor que el valor común de los límites laterales:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(x^2-x)=0 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(x-2)^2-1=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to 1} f(x)=0$$

Además $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=0=f(1)$, con lo que f es continua en $x=1$.

b) Para $x>1$ la función es $y=(x-2)^2+1$. Derivemos e igualemos a cero para obtener los puntos singulares o críticos (posibles extremos relativos):

$$y'=2(x-2) \quad ; \quad y'=0 \Leftrightarrow 2(x-2)=0 \Leftrightarrow x=2$$

Para ver si $x=2$ es un máximo relativo o un mínimo relativo debemos evaluar en la segunda derivada:

$$y''=2 \Rightarrow y''(2)=2>0$$

De lo anterior se deduce que, en el intervalo $(1,\ 4)$, hay un mínimo relativo: $x=2$. Si evaluamos en la función: $f(2)=(2-2)^2+1=1$. Por tanto el punto del plano donde se alcanza el mínimo relativo es el $(2,1)$

c) Si $x>1$, $f'(x)>0 \Leftrightarrow 2(x-2)>0 \Leftrightarrow x>2$. Luego f es estrictamente creciente en el intervalo $(2,\ +\infty)$.
Del mismo modo, si $x>1$, $f'(x)<0 \Leftrightarrow 2(x-2)<0 \Leftrightarrow x<2$. Por tanto f es estrictamente decreciente en el intervalo $(1,\ 2)$.

5. En un instituto el 30 % de los alumnos juegan al baloncesto, el 25 % juegan al fútbol, y el 50 % juegan al fútbol o al baloncesto o a ambos deportes.

   a) Se elige un alumno al azar, ¿cuál es la probabilidad de que juegue al fútbol y juegue al baloncesto?

   b) Si elegimos un alumno al azar y juega al baloncesto, ¿cuál es la probabilidad de que juegue al fútbol?

   Solución:
   Llamemos B al suceso "elegido un alumno al azar, que juegue al baloncesto" y F al suceso "elegido un alumno al azar, que juegue al fútbol". Los porcentajes que se dan en el enunciado del problema se corresponden con las siguientes probabilidades:

   $$P(B) = 0{,}3 \quad ; \quad P(F) = 0{,}25 \quad ; \quad P(F \cup B) = 0{,}5$$

   a) La probabilidad de que un alumno, elegido al azar, juegue al fútbol y juegue al baloncesto viene dada por el suceso $A \cap B$. Como $P(F \cup B) = P(F) + P(B) - P(F \cap B)$, sustituyendo:

   $$0{,}5 = 0{,}25 + 0{,}3 - P(F \cap B) \Rightarrow P(F \cap B) = 0{,}25 + 0{,}3 - 0{,}5 \Rightarrow P(F \cap B) = 0{,}05$$

   b) Lo que se pide es la probabilidad del suceso F condicionado, o sabiendo que ha ocurrido el suceso B: $P(F/B)$. Sabemos que la probabilidad condicionada responde al cociente entre la probabilidad de la intersección, entre la probabilidad de la condición:

   $$P(F/B) = \frac{P(F \cap B)}{P(B)} = \frac{0{,}05}{0{,}3} = 0{,}17$$

6. Se sabe que "el peso de los paquetes de harina" que se producen en una fábrica, sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica 20 gramos. Se seleccionan al azar 50 paquetes de harina y se observa que tienen un peso medio de 745 gramos.

   a) Halla el intervalo de confianza para el peso medio de los paquetes de harina de dicha fábrica con un nivel de confianza del 97 %.

   b) Explica razonadamente cómo podríamos disminuir la amplitud del intervalo con el mismo nivel de confianza.

z	**0.00**	**0.01**	**0.02**	**0.03**	**0.04**	**0.05**	**0.06**	**0.07**	**0.08**	**0.09**
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857

Solución:
Según el enunciado, el tamaño de la muestra es $n = 50$, la media muestral es $\overline{x} = 745$, y la desviación típica es $\sigma = 20$.

a) El intervalo de confianza para el peso medio de los paquetes de harina viene dado por

$$\left(\overline{x} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \overline{x} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

El valor crítico $z_{\alpha/2}$ es aquel que cumple, sobre la distribución normal estándar, que

$$P\left(Z \leqslant z_{\alpha/2}\right) \leqslant 1 - \frac{\alpha}{2}$$

A un nivel de confianza del 97 % se tiene que:

$$1 - \alpha = 0{,}97 \Rightarrow \alpha = 1 - 0{,}97 \Rightarrow \alpha = 0{,}03 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0{,}015 \Rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0{,}985$$

Entonces hemos de buscar en la tabla de la distribución normal estándar, un valor $z_{\alpha/2}$ tal que $P\left(Z \leqslant z_{\alpha/2}\right) = 0{,}985$. Esto se cumple exactamente para $z_{\alpha/2} = 2{,}17$. Así pues, el intervalo de confianza para el gasto medio poblacional es:

$$\left(745 - 2{,}17\frac{20}{\sqrt{50}},\ 745 + 2{,}17\frac{20}{\sqrt{50}}\right) = (745 - 6{,}13,\ 745 + 6{,}13) = (738{,}87,\ 751{,}13)$$

b) Para disminuir la amplitud del intervalo con el mismo nivel de confianza, lo que hemos de hacer es aumentar el tamaño de la muestra. Es decir, tomando $n' \geqslant n$, entonces:

$$\sqrt{n'} \geqslant \sqrt{n} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{n'}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}} \Rightarrow z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n'}} \leqslant z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Por tanto, en el intervalo de confianza, restaríamos y sumaríamos a la media una cantidad menor, lo que haría que la amplitud del intervalo disminuyese.