Pruebas de Acceso a Enseñanzas Universitarias Oficiales de Grado (PAEG)

Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales II - Junio 2011 - Propuesta A

1. Dada la ecuación matricial $I + 3 \cdot X + A \cdot X = B$. Se pide:

   a) Resuelve matricialmente la ecuación.

   b) Si $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$, calcula la matriz X que cumple $A \cdot X = I$, donde I es la matriz identidad de orden 2.

Solución:

a)

$$\begin{array}{rcl} & & I + 3 \cdot X + A \cdot X = B \\ (1) & \Leftrightarrow & 3IX + AX = B - I \\ (2) & \Leftrightarrow & (3I + A)X = B - I \\ (3) & \Leftrightarrow & (3I + A)^{-1}(3I + A)X = (3I + A)^{-1}(B - I) \\ (4) & \Leftrightarrow & IX = (3I + A)^{-1}(B - I) \\ (5) & \Leftrightarrow & X = (3I + A)^{-1}(B - I) \end{array}$$

Observaciones:

- En el paso (1) restamos I a los dos miembros de la igualdad. Además escribiremos $3 \cdot X$ de la forma $3IX$ ¿Por qué se hace esto último? Lo veremos a continuación.
- En el paso (2) sacamos X factor común de la expresión $3IX + AX$ (el factor común X se extrae a la derecha pues a la derecha está en los dos sumandos anteriores). Una vez extraído factor común se tiene $(3I + A)X$. Ahora adquiere sentido el hecho de haber escrito $3 \cdot X$ de la forma $3IX$ ya que así, una vez extraído el factor común, podremos realizar la suma $3I + A$. Si no lo hubiéramos hecho así, al sacar factor común, nos quedaría la expresión $3 + A$, expresión que no tiene sentido pues no se puede sumar un número con una matriz cuadrada de orden mayor o igual que dos. Como ves, en realidad, en el ambiente matricial, si k es un número real, entonces $kA = (kI)A = A(kI)$.
- En el paso (3) multiplicamos por la inversa de $3I + A$ a la izquierda de los dos miembros de la igualdad. Lo hacemos por la izquierda porque $3I + A$ está multiplicando a X también por la izquierda. Lo que no se puede hacer es multiplicar por la inversa por la izquierda en un miembro y por la derecha en otro (o viceversa). Recuérdese que el producto de matrices no es conmutativo.

- En el paso (4) hemos utilizado que el producto de una matriz cuadrada por su inversa es la matriz identidad. En este caso sí que es cierta la conmutatividad del producto de matrices: $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$
- En el paso (5) se ha utilizado que $I \cdot X = X \cdot I = X$ donde I es la matriz identidad. Digamos que la matriz identidad "juega el mismo papel" en el conjunto de las matrices cuadradas, que el número 1 en el conjunto de los números reales (ambos son el elemento neutro de la multiplicación).

b) Sea $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Entonces:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 7 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Multiplicando las matrices del primer miembro de la igualdad anterior:

$$\begin{pmatrix} 3a & 3b \\ 7a+c & 7b+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Y de aquí se obtiene:

$$\begin{cases} 3a = 1 \\ 7a + c = 0 \\ 3b = 0 \\ 7b + d = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{3} \\ c = -\frac{7}{3} \\ b = 0 \\ d = 1 \end{cases}$$

Entonces:

$$X = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{7}{3} & 1 \end{pmatrix}$$

2. En una tienda de ropa figura la siguiente información. Tres pantalones cuestan lo mismo que una camisa y cuatro jerseys. Cinco pantalones cuestan lo mismo que cinco camisas y cuatro jerseys. Un pantalón, una camisa y un jersey cuestan 85 euros. Se pide:

   a) Plantea un sistema de ecuaciones que responda a las condiciones del enunciado.

   b) Determina el precio de un pantalón, de una camisa y de un jersey.

Solución:

a) Llamemos x, y, z, respectivamente, al coste en euros de un pantalón, una camisa y un jersey. Los datos que se dan en el enunciado del problema se pueden plantear mediante el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 3x = y + 4z \\ 5x = 5y + 4z \\ x + y + z = 85 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - y - 4z = 0 \\ 5x - 5y - 4z = 0 \\ x + y + z = 85 \end{cases}$$

b) La expresión matricial del sistema anterior es:

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & -4 & 0 \\ 5 & -5 & -4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 85 \end{pmatrix}$$

Aplicaremos el método de Gauss a esta matriz. En primer lugar intercambiaremos las filas primera y tercera, pues es mucho más cómodo aplicar el método de Gauss si el elemento que ocupa la primera fila y la primera columna es un uno.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 85 \\ 5 & -5 & -4 & 0 \\ 3 & -1 & -4 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ f_2 - 5f_1 \\ f_3 - 3f_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 85 \\ 0 & -10 & -9 & -425 \\ 0 & -4 & -7 & -255 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ (-1)\cdot f_2 \\ (-1)\cdot f_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 85 \\ 0 & 10 & 9 & 425 \\ 0 & 4 & 7 & 255 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} \\ \\ 5f_3 - 2f_2 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 85 \\ 0 & 10 & 9 & 425 \\ 0 & 0 & 17 & 425 \end{pmatrix}$$

Entre las matrices se especifican las operaciones realizadas, donde f_1, f_2 y f_3 son abreviaturas de fila 1, fila 2 y fila 3, respectivamente. El objetivo es obtener dos ceros por debajo del elemento a_{11} de la matriz, y un cero por debajo del elemento a_{22}. De este modo se obtendrá un sistema asociado de tipo escalonado (aquel que tiene todo ceros bajo la diagonal principal). Estos sistemas son muy fáciles de resolver.

Obsérvese que, con las operaciones realizadas, el método ha finalizado pues ya hemos conseguido que todos los elementos de la matriz bajo la diagonal principal sean cero. Es importante observar que, en un paso intermedio, se han multiplicada las filas 2 y 3 por -1 (cambiar de signo), simplemente para tener todos los términos positivos y así trabajar más cómodamente. El sistema asociado a esta última matriz es:

$$\begin{cases} x + z + y = 85 \\ 10y + 9z = 425 \\ 17z = 425 \end{cases}$$

De aquí es fácil despejar las tres incógnitas.

$$z = 25 \quad y = 20 \quad x = 40$$

Por tanto, un pantalón cuesta 40 euros, una camisa 20 euros y un jersey 25 euros.

3. Se considera la función $f(x) = \begin{cases} (x+1)^2+1 & \text{si} \quad x \leqslant 0 \\ |x-1|+1 & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$. Se pide:

   a) Continuidad en $x = 0$.

   b) Extremos relativos en el intervalo $(-2,\ 2)$.

   Solución:

   a) Si los límites laterales en $x = 0$ coinciden y son finitos, existe el límite de la función en $x = 0$ y tiene el mismo valor que el valor común de los límites laterales:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \left((x+1)^2+1\right) = 2 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} (|x-1|+1) = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x) = 2$$

   Además $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 2 = f(0)$, con lo que f es continua en $x = 1$.

   b) La restricción de f al intervalo $(-2,\ 0)$ es la función $g(x) = (x+1)^2+1$. Los extremos relativos de esta última serán también pues los de f en el intervalo $(-2,\ 0)$.

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 2(x+1) = 0 \Leftrightarrow x+1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$$

   Además:

$$g''(x) = 2 \Rightarrow g''(-1) = 2 > 0$$

   Deducimos pues que $x = -1$ es un mínimo relativo. En concreto, el mínimo relativo es el punto $(-1, f(-1)) = (-1, 1)$.

   Nota: Este mínimo se podría haber hallado sin necesidad de recurrir a las derivadas, ya que la función es una parábola y habría bastado hallar el vértice, que en este caso ha de ser el mínimo ya que la parábola se "abre" hacia arriba.

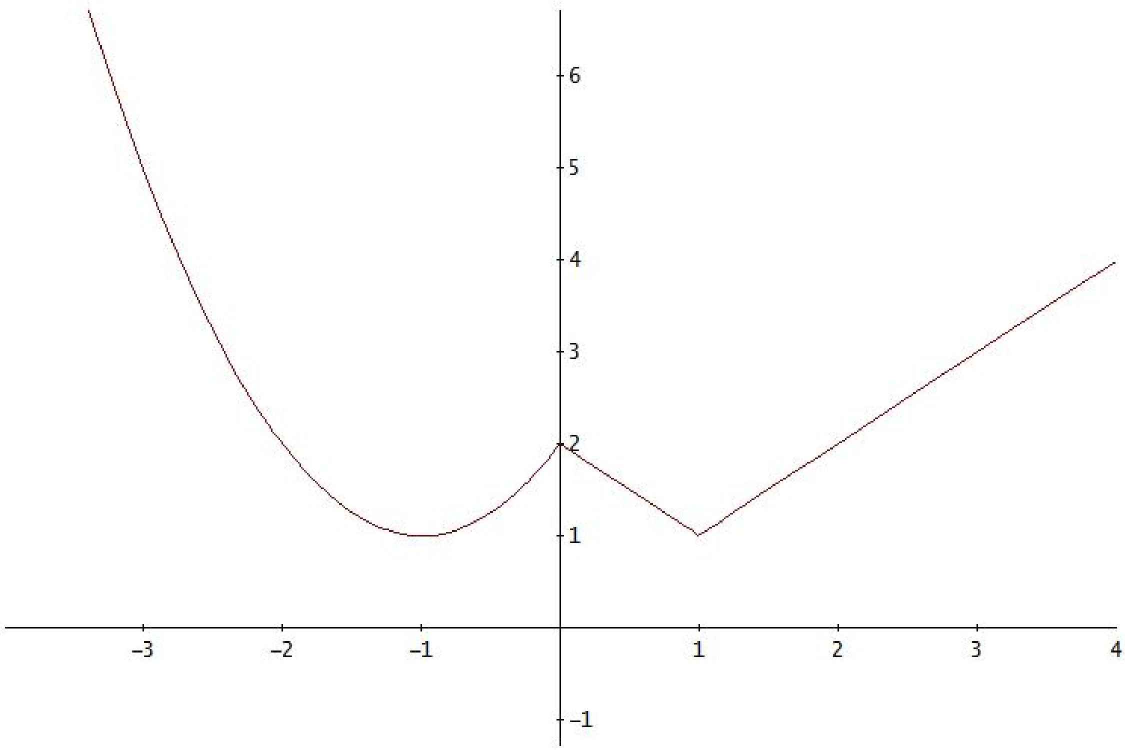
   La restricción de f al intervalo $(0,\ 2)$ es la función $h(x) = |x-1|+1$. La escribiremos de otra manera:

$$|x-1|+1 = \begin{cases} -(x-1)+1 & \text{si} \quad x-1 < 0 \\ x-1+1 & \text{si} \quad x-1 \geqslant 0 \end{cases} = \begin{cases} -x+2 & \text{si} \quad x < 1 \\ x & \text{si} \quad x \geqslant 1 \end{cases}$$

   Como se puede observar, ambos trozos son funciones lineales, la primera decreciente y la segunda creciente. Por tanto el mínimo se alcanza en el punto donde justamente la función cambia de ser un trozo a ser el otro, es decir, en $x = 1$. Así pues, podemos afirmar que otro mínimo relativo de f en el intervalo $(0,\ 2)$ es $x = 1$. En concreto, el mínimo relativo es el punto $(1, f(1)) = (1, 1)$.

Nos queda por estudiar otro punto del intervalo $(2,\ 2)$, el punto $x = 0$. Pero es fácil darse cuenta de que es un máximo relativo ya que a su izquierda la función es creciente (recuérdese que el trozo a la izquierda de $x = 0$ es una parábola que se "abre" hacia arriba), y a su derecha es una función lineal decreciente.
Por tanto, f tiene un máximo relativo en $x = 0$. En concreto el máximo relativo es el punto $(0, f(0)) = (0, 2)$.

En la gráfica de la función se pueden apreciar con claridad los razonamientos anteriores:



4. La función $f(x) = 2x^2 + ax + b$ tiene un mínimo en el punto $(2, -5)$. Se pide:

   a) Determina el valor de a y de b.

   b) Para los valores hallados en el apartado anterior, escribe el intervalo en donde la función es creciente.

Solución:

a) La función pasa por el punto $(2, -5)$. Por tanto:

$$f(2) = -5 \Leftrightarrow 2 \cdot 2^2 + a \cdot 2 + b = -5 \Leftrightarrow 8 + 2a + b = -5 \Leftrightarrow 2a + b = -13 \qquad (1)$$

Como $(2, -5)$ es un mínimo, $x = 2$ habrá de anular a la derivada de f, $f'(x) = 4x + a$:

$$f'(2) = 0 \Leftrightarrow 4 \cdot 2 + a = 0 \Leftrightarrow 8 + a = 0 \Leftrightarrow a = -8$$

Sustituyendo en la igualdad (1):

$$2 \cdot (-8) + b = -13 \Leftrightarrow -16 + b = -13 \Leftrightarrow b = 3$$

b) Para los valores hallados en el apartado anterior la función es $f(x) = 2x^2 - 8x + 3$.

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 4x - 8 > 0 \Leftrightarrow 4x > 8 \Leftrightarrow x > 2$$

Por tanto, f es estrictamente creciente en el intervalo $(2, +\infty)$

Nota: no es necesario hacer uso de las derivadas para deducir que f es estrictamente creciente en el intervalo $(2, +\infty)$, ya que la gráfica de la función es una parábola y su mínimo (vértice) es el punto $(2, -5)$. Por tanto no queda más remedio que sea estrictamente creciente en el intervalo mencionado.

5. En una empresa se producen dos tipos de sillas: A y B, en una proporción de 1 a 3, respectivamente. La probabilidad de que una silla tipo A sea defectuosa es 0,02 y de que una silla de tipo B sea defectuosa es 0,09.

    a) ¿Cuál es la proporción de sillas defectuosas?

    b) Se escoge al azar una silla y resulta no defectuosa, ¿cuál es la probabilidad de que sea del tipo B?

    Solución:
    Llamemos A al suceso "elegida una silla al azar, que sea del tipo A", B al suceso "elegida una silla al azar, que sea del tipo B" y D al suceso "elegida una silla al azar, que sea defectuosa". Como la producción de sillas del tipo A y del tipo B se hace en una proporción de 1 a 3, entonces $P(A) = \frac{1}{4} = 0{,}25$, $P(B) = \frac{3}{4} = 0{,}75$. Además, como la probabilidad de que una silla del tipo A sea defectuosa es 0,02 y de que una silla del tipo B sea defectuosa es 0,09, tenemos que $P(D/A) = 0{,}02$ y $P(D/B) = 0{,}09$.
    Para entender adecuadamente la notación en las probabilidades anteriores, es conveniente observar que el suceso "elegida una silla al azar del tipo A, que sea defectuosa" es el mismo suceso que "la silla elegida al azar es defectuosa condicionado a que la silla es del tipo A", abreviadamente D/A. Análogamente D/B es el suceso "la silla elegida al azar es defectuosa condicionado a que la silla es del tipo B".

    a) Sea D el suceso "elegido una silla al azar, que sea defectuosa". Este suceso es la unión de los sucesos "ser defectuosa y del tipo A" y "ser defectuosa y del tipo B". Simbólicamente se escribe $D = (D \cap A) \cup (D \cap B)$. Los sucesos $D \cap A$ y $D \cap B$ son incompatibles, pues ninguna silla defectuosa puede ser simultáneamente del tipo A y del tipo B. Entonces, puesto que la probabilidad de la unión de sucesos incompatibles es la suma de las probabilidades de cada uno de ellos, podremos calcular del siguiente modo la proporción de sillas defectuosas:

    $$P(D) = P\left[(D \cap A) \cup (D \cap B)\right] = P(D \cap A) + P(D \cap B)$$

    Además, haciendo uso de la definición de probabilidad condicionada, según la cual, para dos sucesos X e Y cualesquiera $P(X/Y) = \dfrac{P(X \cap Y)}{P(Y)} \Rightarrow P(X \cap Y) = P(Y) \cdot P(X/Y)$, tenemos:

    $$P(D) = P(D \cap A) + P(D \cap B) = P(A) \cdot P(D/A) + P(B) \cdot P(D/B) =$$

    $$= 0{,}25 \cdot 0{,}02 + 0{,}75 \cdot 0{,}09 = 0{,}0725$$

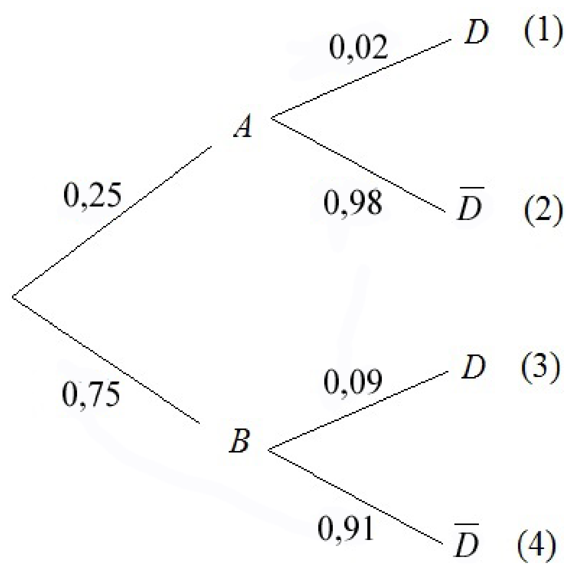
    Esta última igualdad se conoce con el nombre de **teorema de la probabilidad total**.

b) Notaremos $\overline{D}$ es el suceso "elegida una silla al azar, que no sea defectuosa" (complementario o contrario del suceso D). Entonces lo que se pide es la probabilidad del suceso $B/\overline{D}$:

$$P(B/\overline{D}) = \frac{P(B \cap \overline{D})}{P(\overline{D})} = \frac{P(\overline{D}/B) \cdot P(B)}{1 - P(D)} = \frac{0{,}91 \cdot 0{,}75}{1 - 0{,}0725} = \frac{0{,}6825}{0{,}9275} = 0{,}736$$

Ahora hemos utilizado el **teorema de Bayes**.

También podríamos haber hecho el ejercicio utilizando un diagrama de árbol:



Los números encima que aparecen sobre cada rama corresponden a probabilidades de sucesos:

- Las de la primera ramificación son probabilidades de los sucesos A y B: $P(A) = 0{,}25$ y $P(B) = 0{,}75$.
- Las de la segunda ramificación son probabilidades condicionadas por los sucesos de la primera ramificación: $P(D/A) = 0{,}02$, $P(\overline{D}/A) = 0{,}98$, $P(D/B) = 0{,}09$ y $P(\overline{D}/B) = 0{,}91$.

Para hallar la probabilidad de la intersección de dos sucesos basta multiplicar las probabilidades correspondientes a cada una de las ramificaciones correspondientes. Así:

$$P(D) = P(D \cap A) + P(D \cap B) = P((1)) + P((3)) = 0,25 \cdot 0,02 + 0,75 \cdot 0,09 = 0{,}0725$$

$$P(B/\overline{D}) = \frac{P(B \cap \overline{D})}{P(\overline{D})} = \frac{P(B \cap \overline{D})}{P(A \cap \overline{D}) + P(B \cap \overline{D})} = \frac{P((4))}{P((2)) + P((4))} =$$

$$= \frac{0{,}75 \cdot 0{,}91}{0{,}25 \cdot 0{,}98 + 0{,}75 \cdot 0{,}91} = 0{,}736$$

6. La duración de las llamadas de teléfono, en una oficina comercial, sigue una distribución normal con desviación típica 10 segundos. Se toma una muestra aleatoria de 100 llamadas y la media de duración obtenida en esa muestra es de 50 segundos. Se pide:

   a) Calcular un intervalo de confianza al 97 % para la duración media de las llamadas.

   b) Interpretar el significado del intervalo obtenido.

   c) ¿Crees que sería válido el intervalo de confianza obtenido, si la encuesta se hubiera realizado con 100 llamadas de un único empleado? Razona tu respuesta.

z	**0.00**	**0.01**	**0.02**	**0.03**	**0.04**	**0.05**	**0.06**	**0.07**	**0.08**	**0.09**
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857

Solución:
Según el enunciado, el tamaño de la muestra es $n = 100$, la media muestral es $\overline{x} = 50$, y la desviación típica es $\sigma = 10$.

a) El intervalo de confianza para el peso medio de los paquetes de harina viene dado por

$$\left(\overline{x} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \overline{x} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

El valor crítico $z_{\alpha/2}$ es aquel que cumple, sobre la distribución normal estándar, que

$$P\left(Z \leqslant z_{\alpha/2}\right) \leqslant 1 - \frac{\alpha}{2}$$

A un nivel de confianza del 97 % se tiene que:

$$1 - \alpha = 0{,}97 \Rightarrow \alpha = 1 - 0{,}97 \Rightarrow \alpha = 0{,}03 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0{,}015 \Rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0{,}985$$

Entonces hemos de buscar en la tabla de la distribución normal estándar, un valor $z_{\alpha/2}$ tal que $P\left(Z \leqslant z_{\alpha/2}\right) \leqslant 0{,}985$. Esto se cumple exactamente para $z_{\alpha/2} = 2{,}17$. Así pues, el intervalo de confianza para el gasto medio poblacional es:

$$\left(50 - 2{,}17\frac{10}{\sqrt{100}},\ 50 - 2{,}17\frac{10}{\sqrt{100}}\right) = (50 - 2{,}17,\ 50 + 2{,}17) = (47{,}83,\ 52{,}17)$$

b) Si llamamos μ a la duración media del total de las llamadas de teléfono recibidas en la oficina comercial, el intervalo anterior viene a decir que la probabilidad de que dicha media se encuentre entre 47,83 segundos y 52,17 segundos es 0.97 (el nivel de confianza es del 97 %):

$$P(47{,}83 \leqslant \mu \leqslant 52{,}17) = 0{,}97$$

Dicho de otra manera, de cada 100 llamadas que se reciben en la oficina comercial, es casi seguro que 97 de ellas tienen una duración aproximada entre 48 y 52 segundos.

c) El intervalo no sería válido ya que no se trataría de una muestra aleatoria. La muestra seleccionada deber ser representativa de la población estudiada, ya que si no, las conclusiones obtenidas en el estudio no serán fiables.
En general, para que los resultados obtenidos a partir de una muestra sean fiables deben cumplir dos condiciones fundamentales:
- Tener un tamaño adecuado.
- Que sus elementos hayan sido seleccionados de manera aleatoria.

Si se cumplen estas dos condiciones, diremos que la muestra es representativa de la población y la estimación mediante un intervalo de confianza será válida. En el caso de que la selección no sea aleatoria, como es el caso de que las 100 llamadas procedan del mismo empleado, los resultados no son válidos y se dice que la muestra es sesgada.