Evaluación para Acceso a la Universidad

Matemáticas II (Universidad de Castilla-La Mancha) – junio 2017 – Propuesta B

EJERCICIO 1

Enunciado:

Calcula razonadamente los siguientes límites: **(1,25 puntos por límite)**.

a) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3+3x^2-4}{x^3+5x^2+8x+4}$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\ln(x+1)}{2-2\cos x}$

Solución:

a) $$\lim_{x\to -2}\frac{x^3+3x^2-4}{x^3+5x^2+8x+4}=\left[\text{Indeterminación } \frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to -2}\frac{(x+2)(x^2+x-2)}{(x+2)(x^2+3x+2)}=\lim_{x\to -2}\frac{x^2+x-2}{x^2+3x+2}=$$

$$=\left[\text{Indeterminación } \frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to -2}\frac{(x+2)(x-1)}{(x+2)(x+1)}=\lim_{x\to -2}\frac{x-1}{x+1}=\frac{-2-1}{-2+1}=\frac{-3}{-1}=3$$

b) $$\lim_{x\to 0}\frac{x\ln(x+1)}{2-2\cos x}=\left[\text{Indeterminación } \frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)+\dfrac{x}{x+1}}{2\operatorname{sen} x}=\left[\text{Indeterminación } \frac{0}{0}\right]=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{(x+1)^2}}{2\cos x}=\frac{1+1}{2\cdot 1}=\frac{2}{2}=1$$

En este último apartado se ha hecho uso de la regla de L'Hôpital (dos veces) para calcular el límite.

EJERCICIO 2

Enunciado:

Dadas las funciones $f(x)=-x^2$ y $g(x)=x^2-2x-4$

a) Calcula razonadamente el área del recinto cerrado limitado por sus gráficas. **(1,5 puntos)**

b) Encuentra razonadamente la ecuación de la recta normal a la gráfica de $g(x)$ en el punto de abscisa $x=-3$. **(1 punto)**

Solución:

a) Calculemos en primer lugar las abscisas de los puntos en los que se cortan las gráficas de $f(x)$ y de $g(x)$:

$$f(x)=g(x)\Rightarrow -x^2=x^2-2x-4\Rightarrow 2x^2-2x-4=0\Rightarrow\begin{cases}x=-1\\ x=2\end{cases}$$

Además, entre $x=-1$ y $x=2$ es $f(x)\geq g(x)$ pues la inecuación $-x^2\geq x^2-2x-4$ es equivalente a $2x^2-2x-4\leq 0\Leftrightarrow 2(x+1)(x-2)\leq 0$, cuya solución es precisamente el intervalo $[-1,2]$. Por tanto, el área A del recinto cerrado limitado por las gráficas de f y g viene dada por la siguiente integral definida:

$$\int_{-1}^{2}\left(f(x)-g(x)\right)dx=\int_{-1}^{2}\left(-2x^2+2x+4\right)dx=\left[\frac{-2x^3}{3}+x^2+4x\right]_{-1}^{2}=\left(\frac{-16}{3}+4+8\right)-\left(\frac{2}{3}+1-4\right)=9\text{ uds}^2$$

b) La recta normal a la gráfica de $g(x)$ en el punto de abscisa $x=-3$ es la perpendicular a la recta tangente en dicho punto. La recta tangente viene dada por $y-g(-3)=g'(-3)(x-(-3))$. La derivada de la función g es $g'(x)=2x-2$. Por tanto, $g'(-3)=-8$. Como $g(-3)=11$, tenemos que la recta tangente en $x=-3$ es $y-11=-8(x+3)\Rightarrow y=-8x-13$.

Dos puntos de esta recta son, por ejemplo, el $(-3,11)$ y el $(-2,3)$, luego un vector director suyo es $\vec{u}=(1,-8)$. Un vector perpendicular al anterior es fácil de calcular, por ejemplo: $\vec{v}=(8,1)$. Por tanto, la recta normal es la que pasa por el punto $(-3,11)$ y tiene dirección la del vector $\vec{v}$:

$$\frac{x+3}{8}=\frac{y-11}{1}\Rightarrow 8y-88=x+3\Rightarrow x-8y+91=0$$

Este apartado se podría haber resuelto sabiendo que la pendiente de la recta normal es $-\frac{1}{m}$ donde m es la pendiente de la recta tangente. Es decir, la pendiente de la recta normal en nuestro caso sería $\frac{1}{8}$ y de aquí, la recta normal en $x=-3$ es de la forma $y=\frac{1}{8}x+n$. Como esta recta pasa por el punto $(-3,11)$ se tiene, sustituyendo, que

$$11=\frac{1}{8}\cdot(-3)+n\Rightarrow 88=-3+8n\Rightarrow 8n=91\Rightarrow n=\frac{91}{8}$$

Por tanto, la recta que se busca es $y=\frac{1}{8}x+\frac{91}{8}$ (esta es la ecuación afín o explícita de la recta). Si se pasa a general o implícita se obtiene $x-8y+91=0$.

EJERCICIO 3

Enunciado:

Dadas matrices

$$A=\begin{pmatrix}2&1&0\\-1&0&0\\1&2&-1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}-1&0&1\\2&-1&0\\1&0&0\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&3&0\\-1&0&-1\end{pmatrix}$$

a) ¿Tiene inversa la matriz $2I_3+B$? Razona la respuesta. I_3 es la matriz identidad de orden 3. **(1 punto)**

b) Calcula razonadamente la matriz X que verifica que $2X+C=A-X\cdot B$. **(1,5 puntos)**

Solución:

a) $2I_3+B=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1&0&1\\2&-1&0\\1&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&1\\2&1&0\\1&0&2\end{pmatrix}$.

Sabemos que una matriz cuadrada tiene inversa si su determinante es distinto de cero. Como

$$|2I_3+B|=\begin{vmatrix}1&0&1\\2&1&0\\1&0&2\end{vmatrix}=2-1=1\neq 0$$

resulta que, efectivamente, la matriz $2I_3+B$ tiene inversa.

b) $2X+C=A-X\cdot B\Rightarrow 2X+XB=A-C\Rightarrow X(2I_3+B)=A-C\Rightarrow$

$\Rightarrow X(2I_3+B)(2I_3+B)^{-1}=(A-C)(2I_3+B)^{-1}\Rightarrow X=(A-C)(2I_3+B)^{-1}$

La matriz adjunta de $2I_3+B$ es $(2I_3+B)^d=\begin{pmatrix}2&-4&-1\\0&1&0\\-1&2&1\end{pmatrix}$.

La traspuesta de la adjunta es $\left[(2I_3+B)^d\right]^t=\begin{pmatrix}2&0&-1\\-4&1&2\\-1&0&1\end{pmatrix}$.

Por tanto, la matriz inversa es $(2I_3+B)^{-1}=\dfrac{1}{|2I_3+B|}\left[(2I_3+B)^d\right]^t=\dfrac{1}{1}\cdot\begin{pmatrix}2&0&-1\\-4&1&2\\-1&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0&-1\\-4&1&2\\-1&0&1\end{pmatrix}$.

Así pues: $X=X=(A-C)(2I_3+B)^{-1}=\begin{pmatrix}2&0&0\\-1&-3&0\\2&2&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&0&-1\\-4&1&2\\-1&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&0&-2\\10&-3&-5\\-4&2&2\end{pmatrix}$

EJERCICIO 4

Enunciado:

a) Encuentra razonadamente la ecuación de la recta, en su forma general o implícita, que contiene a los puntos $P(0,1,-2)$ y $Q(4,-3,0)$. **(1 punto)**

b) Encuentra razonadamente un punto que equidiste de P y Q y que pertenezca a la recta

$$r\equiv\begin{cases}x=2+\lambda\\y=-\lambda\\z=-5\end{cases}\qquad \lambda\in\mathbb{R}.$$ **(1,5 puntos)**

Solución:

a) Un vector director de la recta es $\vec{u}=\overrightarrow{PQ}=(4,-4,2)$. Podemos tomar como vector director uno proporcional al anterior más sencillo de manejar, por ejemplo $\vec{u}=(2,-2,1)$. La ecuación de la recta en su forma continua es $\dfrac{x-0}{2}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z+2}{1}$, y en su forma general o implícita es

$$\begin{cases}-2x=2y-2\\x=2z+4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x+y-1=0\\x-2z-4=0\end{cases}$$

La ecuación general o implícita puede adoptar distintas maneras. Antes hemos eliminado denominadores igualando las razones primera y segunda por un lado, y primera y tercera, por otro. Pero si eliminamos denominadores con la primera y segunda, y con la segunda y tercera obtenemos:

$$\begin{cases} -2x = 2y-2 \\ y-1 = -2z-4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y-1=0 \\ y+2z+3=0 \end{cases}$$

b) Un punto A de r es siempre de la forma $A(2+\lambda,-\lambda,-5)$. Si deseamos encontrar un punto de la recta r que equidiste (estar a la misma distancia) de P y Q, se ha de cumplir que $\left|\overrightarrow{AP}\right| = \left|\overrightarrow{AQ}\right|$. Tenemos que

$$\overrightarrow{AP} = (2+\lambda,-\lambda-1,-3),\ \overrightarrow{AQ} = (\lambda-2,-\lambda+3,-5).$$

Por tanto:

$$\left|\overrightarrow{AP}\right| = \sqrt{(2+\lambda)^2+(-\lambda-1)^2+(-3)^2} = \sqrt{4+4\lambda+\lambda^2+\lambda^2+2\lambda+1+9} = \sqrt{2\lambda^2+6\lambda+14}$$

$$\left|\overrightarrow{AQ}\right| = \sqrt{(\lambda-2)^2+(-\lambda+3)^2+(-5)^2} = \sqrt{\lambda^2-4\lambda+4+\lambda^2-6\lambda+9+25} = \sqrt{2\lambda^2-10\lambda+38}$$

Y de aquí deducimos que:

$$\left|\overrightarrow{AP}\right| = \left|\overrightarrow{AQ}\right| \Rightarrow \sqrt{2\lambda^2+6\lambda+14} = \sqrt{2\lambda^2-10\lambda+38} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\lambda^2+6\lambda+14 = 2\lambda^2-10\lambda+38 \Rightarrow 16\lambda = 24 \Rightarrow \lambda = \frac{24}{16} = \frac{3}{2}$$

De este modo el punto buscado es:

$$A(2+\lambda,-\lambda,-5) = A\left(2+\frac{3}{2},-\frac{3}{2},-5\right) = A\left(\frac{7}{2},-\frac{3}{2},-5\right)$$

EJERCICIO 5

Enunciado:

a) En mi casa dispongo de dos estanterías A y B. En A tengo 20 novelas, 10 ensayos y 10 libros de matemáticas y en la B tengo 12 novelas y 8 libros de matemáticas. Elijo una estantería al azar y de ella, también al azar, un libro. Calcula razonadamente la probabilidad de que:

a1) El libro elegido sea de matemáticas. **(0,75 puntos)**

a2) Si el libro elegido resultó ser de matemáticas, que fuera de la estantería B. **(0,5 puntos)**

b) El tiempo de espera en una parada del autobús se distribuye según distribución normal de media 15 minutos y desviación típica 5 minutos.

b1) Calcula razonadamente la probabilidad de esperar menos de 13 minutos. **(0,75 puntos)**

b2) ¿Cuántos minutos de espera son superados por el 33 % de los usuarios? Razona la respuesta. **(0,5 puntos)**

a	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879

Solución:

a) Llamemos A y B a los sucesos "elegir la estantería A o B", respectivamente. Entonces $P(A)=P(B)=0,5$. Llamemos también N, E y M a los sucesos "elegir una novela, elegir un ensayo o elegir un libro de matemáticas", respectivamente. Entonces, según el enunciado, tenemos las siguientes probabilidades condicionadas:

$$P(N/A)=\frac{20}{40}=0,5\ ;\ P(E/A)=\frac{10}{40}=0,25\ ;\ P(M/A)=\frac{10}{40}=0,25$$

$$P(N/B)=\frac{12}{20}=0,6\ ;\ P(M/B)=\frac{8}{20}=0,4$$

Según el teorema de la probabilidad total, la probabilidad de que el libro elegido sea de matemáticas es:

$$P(M)=P(M\cap A)+P(M\cap B)=P(M/A)\cdot P(A)+P(M/B)\cdot P(B)=0,25\cdot 0.5+0,4\cdot 0,5=0,325$$

Si el libro elegido resultó ser de matemáticas, la probabilidad de que fuera de la estantería B viene dada por la siguiente probabilidad condicionada (teorema de Bayes).

$$P(B/M)=\frac{P(B\cap M)}{P(M)}=\frac{P(M/B)\cdot P(B)}{P(M)}=\frac{0,4\cdot 0,5}{0,325}=\frac{0,2}{0,325}\cong 0,615$$

b) Llamemos X a la variable "tiempo de espera". X se distribuye según una normal de media 15 minutos y desviación típica 5 minutos. Simbólicamente: $X\to N(15,\ 5)$. Por tanto, la variable $Z=\frac{X-15}{5}$ se distribuye según una normal de media 0 y desviación 1 (tipificación de la variable), cuyas probabilidades $P(Z\le a)$ podemos mirar en la tabla adjunta.

La probabilidad de esperar menos de 13 minutos viene dada por:

$$P(X\le 13)=P\left(Z\le\frac{13-15}{5}\right)=P(Z\le -0,4)=P(Z\ge 0,4)=1-P(Z\le 0,4)=1-0,6554=0,3446$$

Para saber los minutos de espera que son superados por el 33 % de los usuarios, llamaremos x al número de minutos y plantearemos la siguiente ecuación: $P(X\ge x)=0,33$. Ahora operamos teniendo en cuenta las propiedades de la distribución normal:

$$P(X\ge x)=0,33\Rightarrow 1-P(X\le x)=0,33\Rightarrow P(X\le x)=0,66\Rightarrow P\left(Z\le\frac{x-15}{5}\right)=0,66\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{x-15}{5}=0,41\Rightarrow x-15=2,05\Rightarrow x=17,05$$

Esto quiere decir que el 33 % de los usuarios superan los 17,05 minutos de espera.