Pruebas de Acceso a Enseñanzas Universitarias Oficiales de Grado (PAEG)

Matemáticas II (Universidad de Castilla-La Mancha) – junio 2016 – Propuesta B

EJERCICIO 1

Enunciado:

a) Enuncia los teoremas de Bolzano y de Rolle. **(1 punto)**

b) Razona que la ecuación $2e^x + x^5 = 0$ tiene al menos una solución real. **(0,75 puntos)**

c) Razona que, de hecho, dicha solución es única. **(0,75 puntos)**

Solución:

a) Teorema de Bolzano

Sea f una función continua en un intervalo cerrado $[a,b]$ y supongamos que el signo de $f(a)$ es distinto que el signo de $f(b)$. Entonces existe $c \in (a,b)$ tal que $f(c)=0$.

Teorema de Rolle

Sea $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b) verificando que $f(a)=f(b)$. Entonces existe un punto c del intervalo (a,b) tal que $f'(c)=0$.

b) La función definida por $f(x)=2e^x+x^5$ está definida y es continua en todo $\mathbb{R}$, en particular en el intervalo cerrado $[-1,0]$. Además $f(-1)=2e^{-1}+(-1)^5=\dfrac{2}{e}-1<0$ y $f(0)=2e^0+0^5=2>0$. Entonces existe al menos un número real $c\in(-1,0)$ tal que $f(c)=0$, es decir, tal que $2e^c+c^5=0$, con lo que la ecuación $2e^x+x^5=0$ tiene al menos una solución real.

c) Supongamos que la ecuación $2e^x+x^5=0$ tuviera dos soluciones: c_1 y c_2. O lo que es lo mismo, considerando la función del aparatado b), que $f(c_1)=f(c_2)=0$. La función f es claramente continua en $[c_1,c_2]$ y derivable en (c_1,c_2) con lo que, por el teorema de Rolle, existiría $c\in(c_1,c_2)$ tal que $f'(c)=0$. Pero esto es una contradicción por que $f'(x)=2e^x+x^4>0$ para todo $x\in\mathbb{R}$. Esto quiere decir que no puede haber dos o más soluciones de la ecuación $2e^x+x^5=0$ y, por tanto, la solución del apartado b) es única.

EJERCICIO 2

Enunciado:

a) Calcula el área de la región acotada por las gráficas de las parábolas $f(x)=x^2-4x+3$ y $g(x)=-x^2+2x+11$. **(1,5 puntos)**

b) Calcula $c\in\mathbb{R}$ para que las rectas tangentes a las gráficas de $f(x)$ y $g(x)$ en el punto de abscisa $x=c$ tengan la misma pendiente. **(1 punto)**

Solución:

a) Hallemos los puntos en los que se cortan ambas parábolas.

$$x^2-4x+3=-x^2+2x+11\Leftrightarrow 2x^2-6x-8=0\Leftrightarrow\begin{cases}x=-1\\x=4\end{cases}$$

La parábola $g(x)=-x^2+2x+11$ se abre "hacia abajo" y, por tanto, entre los puntos de abscisa $x=-1$ y $x=4$, estará "por encima" de la parábola $f(x)=x^2-4x+3$. Entonces, el área A de la región acotada por las gráficas de ambas parábolas viene dada por $A=\int_{-1}^{4}(g(x)-f(x))\,dx$. Hagamos los cálculos.

$$A=\int_{-1}^{4}(g(x)-f(x))\,dx=\int_{-1}^{4}(-2x^2+6x+8)\,dx=\left.\frac{-2x^3}{3}+3x^2+8x\right]_{-1}^{4}=$$

$$=\left(\frac{-128}{3}+48+32\right)-\left(\frac{2}{3}+3-8\right)=\frac{-130}{3}+85=\frac{125}{3}\,\text{uds}^2$$

b) Las rectas tangentes a las gráficas de $f(x)$ y $g(x)$ en el punto de abscisa $x=c$ tienen pendiente $f'(c)$ y $g'(c)$. Por tanto, si estas pendiente son iguales, tenemos:

$$f'(c)=g'(c)\Leftrightarrow 2c-4=-2c+2\Leftrightarrow 4c=6\Leftrightarrow c=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$$

EJERCICIO 3

Enunciado:

Sabiendo que

$$\begin{vmatrix}2&2&3\\x&y&z\\a&2b&3c\end{vmatrix}=10$$

donde $x,y,z,a,b,c\in\mathbb{R}$, calcula los determinantes

$$\begin{vmatrix}14&14&21\\x+4&y+4&z+6\\\frac{a}{5}&\frac{2b}{5}&\frac{3c}{5}\end{vmatrix}\quad\text{y}\quad\begin{vmatrix}0&3x&y&z\\0&3a&2b&3c\\0&6&2&3\\5&0&0&0\end{vmatrix}$$

indicando las propiedades que usas en cada caso para justificar tu respuesta **(1,25 puntos por determinante)**

Solución:

$$\begin{vmatrix}14&14&21\\x+4&y+4&z+6\\\frac{a}{5}&\frac{2b}{5}&\frac{3c}{5}\end{vmatrix}=\frac{7}{5}\begin{vmatrix}2&2&3\\x+4&y+4&z+6\\a&2b&3c\end{vmatrix}=\frac{7}{5}\left(\begin{vmatrix}2&2&3\\x&y&z\\a&2b&3c\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}2&2&3\\4&4&6\\a&2b&3c\end{vmatrix}\right)=\frac{7}{5}\begin{vmatrix}2&2&3\\x&y&z\\a&2b&3c\end{vmatrix}=\frac{7}{5}\cdot10=14.$$

Para la primera igualdad hemos utilizado que si en un determinante los elementos de una fila o una columna están multiplicados por un número el valor del determinante queda multiplicado por dicho número.

Para la segunda igualdad se ha utilizado que, si una fila o una columna es una suma, el determinante puede descomponerse en una suma de determinantes.

Finalmente, en la tercera igualdad hemos utilizado que, si dos filas o dos columnas son proporcionales, el determinante es cero (en este paso, en el segundo determinante, la segunda fila es la primera multiplicada por dos).

$$\begin{vmatrix} 0 & 3x & y & z \\ 0 & 3a & 2b & 3c \\ 0 & 6 & 2 & 3 \\ 5 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -5\begin{vmatrix} 3x & y & z \\ 3a & 2b & 3c \\ 6 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -5\cdot 3\begin{vmatrix} x & y & z \\ a & 2b & 3c \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -15\begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ x & y & z \\ a & 2b & 3c \end{vmatrix} = -15\cdot 10 = -150\,.$$

Para la primera igualdad se ha desarrollado el determinante de orden cuatro por los elementos de la primera columna.

Para la segunda igualdad se ha utilizado que que si en un determinante los elementos de una fila o una columna están multiplicados por un número el valor del determinante queda multiplicado por dicho número (todos los elementos de la primera columna están multiplicados por tres).

Y para la tercera igualdad hemos utilizado que, si se intercambia dos filas o dos columnas entre sí, el determinante cambia de signo. En este caso hemos realizado dos intercambios, con lo que el signo del determinante no varía: en primer lugar, primera fila por tercera fila y, en segundo lugar, segunda fila por tercera fila.

EJERCICIO 4

Enunciado:

Dados los planos

$$\pi_1 \equiv ax + y + 2z = 2\,,\ \pi_2 \equiv x + y + z = 0 \ \text{ y } \ \pi_3 \equiv x + ay + z = a\,,$$

donde $a \in \mathbb{R}$, se pide:

a) Estudiar la posición relativa de los planos anteriores en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$. **(1,5 puntos)**

b) Para el valor $a = 1$, calcular la distancia entre π_2 y π_3. **(1 punto)**

Solución:

a) Estudiaremos el carácter, según los valores del parámetro $a \in \mathbb{R}$, del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} ax + y + 2z = 2 \\ x + y + z = 0 \\ x + ay + z = a \end{cases}$$

La matriz A de los coeficientes y la matriz ampliada $A\,|\,b$ asociadas a este sistema son, respectivamente:

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix} \ ;\ A\,|\,b = \begin{pmatrix} a & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & a & 1 & a \end{pmatrix}$$

Por un lado $|A| = (a + 1 + 2a) - (2 + 1 + a^2) = -a^2 + 3a - 2$. Como $-a^2 + 3a - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ a = 2 \end{cases}$, podemos hacer la siguiente discusión:

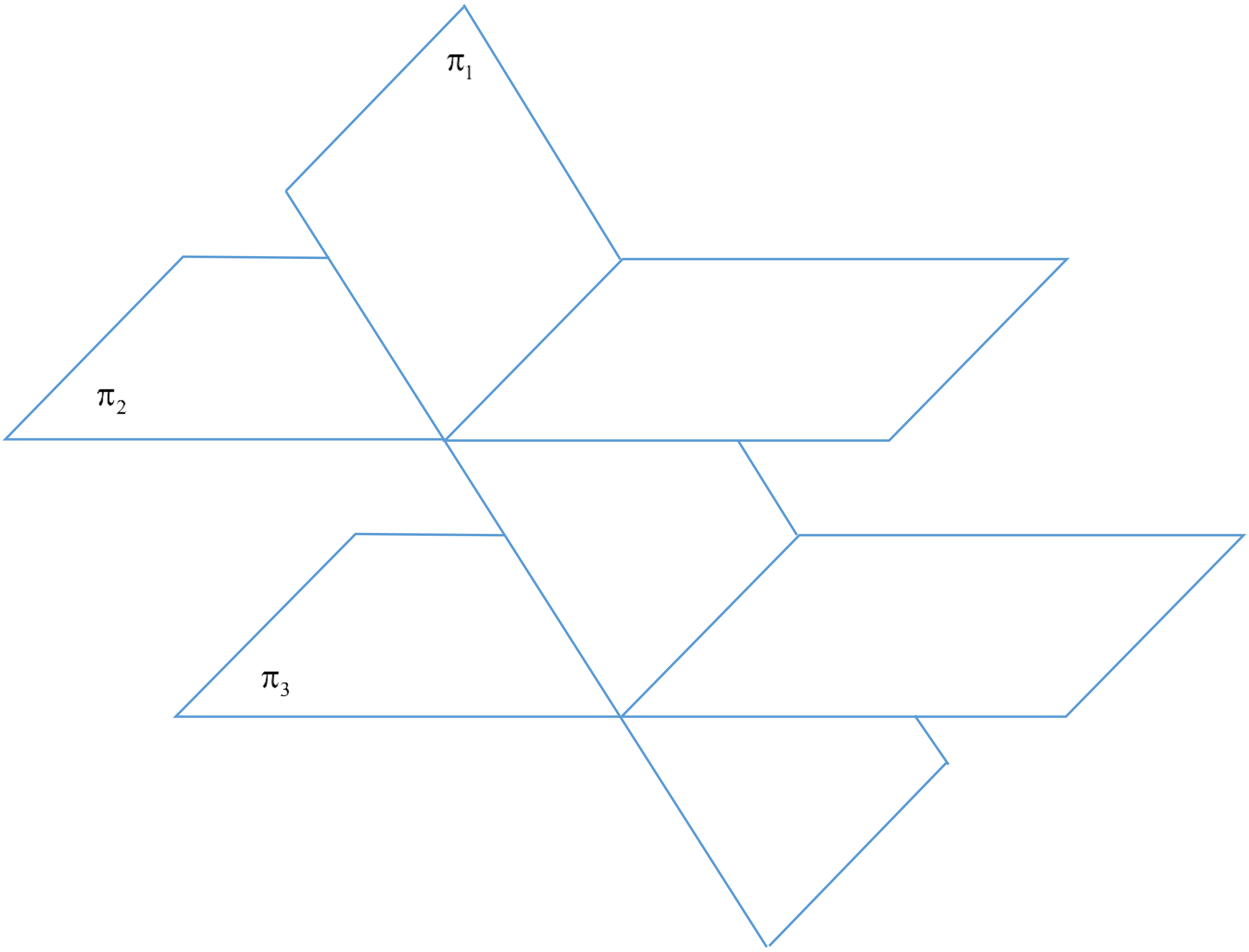
- Si $a \neq 1$ y $a \neq 2$, $|A| \neq 0$, con lo que $\text{rango}\, A = \text{rango}\, A\,|\,b = 3 = n$ (n indica el número de incógnitas), pues hay un menor de orden tres distinto de cero. Entonces el sistema es compatible determinado (solución única) y los planos π_1, π_2 y π_3 se cortan en un punto.
- Si $a = 1$ o $a = 2$, $|A| = 0$. En ambos casos $\text{rango}\, A = 2$ pues contiene un menor de orden dos distinto de cero: $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 2 = -1 \neq 0$.

  Analicemos por separado lo que le ocurre a la matriz ampliada para comparar con el rango de la matriz de los coeficientes, decidir el carácter del sistema y, por tanto, la posición relativa de los tres planos.

✓ Si $a=1$, $A|b=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, cuyo rango es tres porque contiene un menor de orden tres distinto de cero: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=(1+0+2)-(2+2+0)=3-4=-1\neq 0$. Por tanto $\text{rango}\, A=2\neq 3=\text{rango}\, A|b$ y el sistema es incompatible (no tiene solución). Esto quiere decir que los tres planos no tienen ningún punto en común. Pero es que además los planos son:

$$\pi_1\equiv x+y+2z=2\,,\ \pi_2\equiv x+y+z=0 \text{ y } \pi_3\equiv x+y+z=1$$

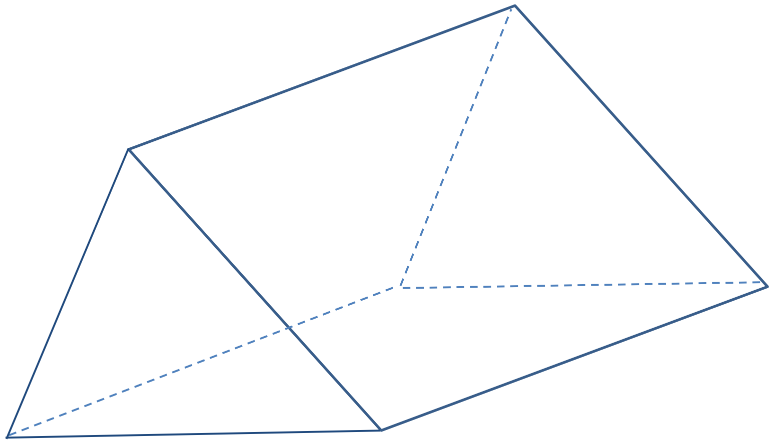
Claramente π_2 y π_3 son paralelos (los coeficientes de x, y, z son los mismos) y ambos secantes a π_1, con lo que la posición será la de la figura siguiente:



✓ Si $a=2$, $A|b=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, cuyo rango vuelve a ser tres pues contiene un menor de orden tres distinto de cero: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}=(2+2)-(4+4)=-4\neq 0$. Por tanto, al igual que nos ocurría anteriormente, $\text{rango}\,A = 2 \neq 3 = \text{rango}\,A|b$ y el sistema es incompatible (no tiene solución). Esto quiere decir, de nuevo, que los tres planos no tienen ningún punto en común. Esta vez los planos son:

$$\pi_1 \equiv 2x + y + 2z = 2\,,\ \pi_2 \equiv x + y + z = 0 \text{ y } \pi_3 \equiv x + 2y + z = 2$$

Es muy fácil darse cuenta, comparando coeficientes, de que son secantes dos a dos, con lo que la posición viene dada por una figura como la siguiente:



b) Para $a = 1$, $\pi_2 \equiv x + y + z = 0$, $\pi_3 \equiv x + y + z - 1 = 0$. Por ser paralelos, la distancia entre ambos planos será la distancia de un punto de uno de ellos al otro. Un punto de π_2 es $P(1,-1,0)$. Por tanto, la distancia entre los dos planos vendrá dada por:

$$d(\pi_2, \pi_3) = d(P, \pi_3) = \frac{|1\cdot 1 + (-1)\cdot 1 + 0\cdot 1 + (-1)|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}\,\text{uds}$$