Pruebas de Acceso a Enseñanzas Universitarias Oficiales de Grado (PAEG)

Matemáticas II – Junio 2013 – Propuesta B

Propuesta A. Ejercicio 1

Enunciado:

a) Calcula los valores de los parámetros $a,\, b\in\mathbb{R}$ para que la función

$$f(x)=\frac{ax^2+bx}{x+1}$$

tenga como asíntota oblicua la recta $y=2x+3$.

b) Para los valores encontrados, escribe la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisas $x=0$.

Solución:

a) Si $y=mx+n$ es una asíntota oblicua, entonces $m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$ y $n=\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-mx\right)$.

En nuestro caso:

$$2=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{ax^2+bx}{x+1}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{ax^2+bx}{x^2+x}=a\text{ . Por tanto } a=2\,.$$

$$3=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2+bx}{x+1}-2x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+bx-2x^2-2x}{x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{(b-2)x}{x+1}=b-2\Rightarrow b-2=3\Rightarrow b=5\,.$$

b) Para los valores encontrados en el apartado anterior la función queda de la forma:

$$f(x)=\frac{2x^2+5x}{x+1}$$

La recta tangente en el punto de abscisas $x=0$ es:

$$y-f(0)=f'(0)(x-0)$$

Derivemos y evaluemos en cero la derivada:

$$f'(x)=\frac{(4x+5)\cdot(x+1)-\left(2x^2+5x\right)\cdot 1}{(x+1)^2}\Rightarrow f'(0)=\frac{5\cdot 1}{1^2}=5\,.$$

Por otro lado: $f(0)=\frac{2\cdot 0^2+5\cdot 0}{0+1}=0$.

Entonces la recta tangente en el punto de abscisas $x=0$ es:

$$y-0=5(x-0)\Rightarrow y=5x\,.$$

Propuesta A. Ejercicio 2

Enunciado:

Calcula las siguientes integrales:

$$\int \frac{2\,\text{sen}\,x\cos x}{1+\text{sen}^2 x}\,dx \qquad\qquad \int \frac{x^2+x-4}{x^3-4x}\,dx$$

Solución:

- $\displaystyle\int \frac{2\,\text{sen}\,x\cos x}{1+\text{sen}^2 x}\,dx$. Es inmediata pues la derivada del denominador es justamente el numerador. Por tanto:

  $$\int \frac{2\,\text{sen}\,x\cos x}{1+\text{sen}^2 x}\,dx = \ln\left|1+\text{sen}^2 x\right| + C$$

- $\displaystyle\int \frac{x^2+x-4}{x^3-4x}\,dx$. Es de tipo racional. El grado del denominador es mayor que el del numerador. Factoricemos el denominador: $x^3-4x = x\left(x^2-4\right) = x(x+2)(x-2)$. Entonces podemos descomponer la fracción algebraica del siguiente modo:

  $$\frac{x^2+x-4}{x^3-4x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x-2} = \frac{A(x+2)(x-2)+Bx(x-2)+Cx(x+2)}{x(x+2)(x-2)}$$

  Igualando denominadores y dando valores a x tenemos:

  ✓ Si $x=0$, entonces $-4=-4A \Rightarrow A=1$.

  ✓ Si $x=-2$, entonces $-2=8B \Rightarrow B=-\frac{2}{8}=-\frac{1}{4}$.

  ✓ Si $x=2$, entonces $2=8C \Rightarrow C=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$.

  Por tanto:

  $$\int \frac{x^2+x-4}{x^3-4x}\,dx = \int \frac{1}{x}\,dx - \frac{1}{4}\int \frac{1}{x+2}\,dx + \frac{1}{4}\int \frac{1}{x-2}\,dx = \ln|x| - \frac{1}{4}\ln|x+2| + \frac{1}{4}\ln|x-2| + C\,.$$

Propuesta A. Ejercicio 3

Enunciado:

a) Sabiendo que

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = 2$$

donde $a,\, b,\, c \in \mathbb{R}$, calcula los determinantes

$$\begin{vmatrix} a-1 & b-1 & c-1 \\ a^2-1 & b^2-1 & c^2-1 \\ 5 & 5 & 5 \end{vmatrix} \qquad \text{y} \qquad \begin{vmatrix} (a+1)^2 & (b+1)^2 & (c+1)^2 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$$

Indicando las propiedades que usas en cada caso para justificar tu respuesta.

b) Razona que, puesto que $|A|=2$, los parámetros a, b y c deben ser distintos entre sí (no puede haber dos iguales).

Solución:

a) Calculemos el valor del primer determinante:

$$\begin{vmatrix} a-1 & b-1 & c-1 \\ a^2-1 & b^2-1 & c^2-1 \\ 5 & 5 & 5 \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} \begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2-1 & b^2-1 & c^2-1 \\ 5 & 5 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 \\ a^2-1 & b^2-1 & c^2-1 \\ 5 & 5 & 5 \end{vmatrix} \overset{(2)}{=} \begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2-1 & b^2-1 & c^2-1 \\ 5 & 5 & 5 \end{vmatrix} \overset{(3)}{=}$$

$$\overset{(3)}{=} \begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ 5 & 5 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c \\ -1 & -1 & -1 \\ 5 & 5 & 5 \end{vmatrix} \overset{(4)}{=} \begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ 5 & 5 & 5 \end{vmatrix} \overset{(5)}{=} 5\cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \overset{(6)}{=} 5\cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = 5\cdot 2 = 10$$

Propiedades utilizadas:

(1) y (3): Si dos determinantes tienen todos sus elementos iguales salvo, a lo sumo, los de una fila o columna, entonces se pueden sumar, dando como resultado otro determinante con la misma parte común y con el resultado de sumar las dos líneas respectivas.

(2) y (4): Un determinante con dos filas o dos columnas proporcionales vale cero.

(5): Si en un determinante multiplicamos todos los términos de una fila o de una columna por un número, el valor del determinante queda multiplicado por dicho número.

(6): Si en un determinante se intercambian entre sí dos filas o dos columnas el determinante conserva el mismo valor absoluto, pero cambia de signo. Como se han hecho dos intercambios (1ª y 3ª fila y luego 2ª y 3ª fila), el determinante cambia dos veces de signo y permanece igual.

Calculemos ahora el valor del segundo determinante:

$$\begin{vmatrix} (a+1)^2 & (b+1)^2 & (c+1)^2 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a^2+2a+1 & a^2+2b+1 & a^2+2c+1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} \begin{vmatrix} a^2 & a^2 & a^2 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2a+1 & 2b+1 & 2c+1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} \overset{(2)}{=}$$

$$\overset{(2)}{=} \begin{vmatrix} 2a+1 & 2b+1 & 2c+1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} \overset{(3)}{=} \begin{vmatrix} 2a & 2b & 2c \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} \overset{(4)}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = 2$$

Propiedades utilizadas:

(1) y (3): Si dos determinantes tienen todos sus elementos iguales salvo, a lo sumo, los de una fila o columna, entonces se pueden sumar, dando como resultado otro determinante con la misma parte común y con el resultado de sumar las dos líneas respectivas.

(2) y (4): Un determinante con dos filas o dos columnas iguales vale cero.

b) Si $a=b$, la primera y la segunda columna serían iguales y el determinante valdría cero, lo cual contradice que $|A|=2$. Por tanto $a\neq b$.

Si $a=c$, la primera y la tercera columna serían iguales y el determinante valdría cero, lo cual contradice que $|A|=2$. Por tanto $a\neq c$.

Del mismo modo se puede razonar si se supusiera que $b\neq c$. En este caso la segunda y tercera columna serían iguales y se llegaría también a contradicción. Por tanto $b=c$.

PROPUESTA A. EJERCICIO 4

Enunciado:

a) Estudia la posición relativa de las rectas

$$r \equiv \begin{cases} x+y-z=1 \\ 2x+y-2z=1 \end{cases} \qquad \text{y} \qquad s \equiv \begin{cases} x-z=0 \\ x+2y-z=12 \end{cases}$$

b) Calcula la distancia entre las rectas r y s.

Solución:

a) Pasemos ambas rectas a paramétricas. Para ello hagamos $z=\lambda$:

- $r \equiv \begin{cases} x+y-z=1 \\ 2x+y-2z=1 \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x+y=1+\lambda \\ 2x+y=1+2\lambda \end{cases}$

  Restando ambas ecuaciones: $-x=-\lambda \Rightarrow x=\lambda$.

  Multiplicando la primera por -2 y sumando a la segunda: $-y=-1 \Rightarrow y=1$.

  Por tanto: $r \equiv \begin{cases} x=\lambda \\ y=1 \\ z=\lambda \end{cases}$

- $s \equiv \begin{cases} x-z=0 \\ x+2y-z=12 \end{cases} \Rightarrow s \equiv \begin{cases} x=\lambda \\ x+2y=12+\lambda \end{cases}$

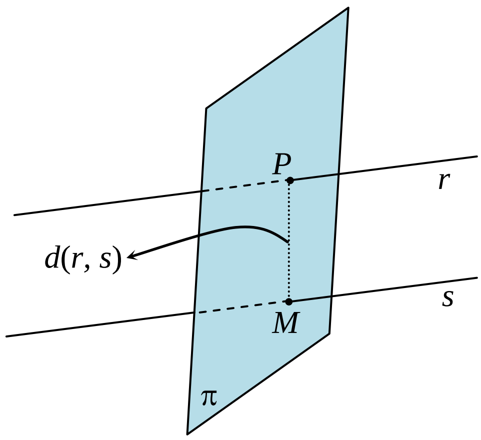
  Sustituyendo en la segunda ecuación: $\lambda+2y=12+\lambda \Rightarrow y=6$.

  Por tanto: $s \equiv \begin{cases} x=\lambda \\ y=6 \\ z=\lambda \end{cases}$

Ambas rectas tienen el mismo vector director: $\vec{u}=(1,\,0,\,1)$. Luego ambas rectas han de ser paralelas o coincidentes. Un punto de r es $P(0,\,1,\,0)$ y un punto de s es $Q(0,\,6,\,0)$. Como el vector $\overrightarrow{PQ}=(0,\,5,\,0)$ no tiene la misma dirección que $\vec{u}$ las rectas no pueden ser coincidentes. Por tanto r y s son paralelas.

b) Al ser paralelas, la distancia entre r y s coincidirá con la distancia entre un punto de r, por ejemplo el punto $P(0,\,1,\,0)$, y la recta s: $d(r,\,s)=d(P,\,s)$.

Esta distancia será también igual a la distancia de P a M, donde M es el punto de intersección de s con el plano π que pasa por P y es perpendicular a s (ver figura).



El vector $\vec{u}=(1,\,0,\,1)$, dirección de r y s nos servirá como vector normal del plano (así el plano será perpendicular a s). Por tanto $\pi \equiv x+z+D=0$. Como π pasa por P, claramente $D=0$. Entonces $\pi \equiv x+z=0$. El corte de este plano y s es justamente $Q(0,\,6,\,0)$ (es muy fácil de comprobar). Luego $M=Q$. Por tanto:

$$d(r,\,s)=d(P,\,s)=d(P,\,Q)=\left|\overrightarrow{PQ}\right|=\sqrt{0^2+5^2+0^2}=5.$$