Pruebas de Acceso a Enseñanzas Universitarias Oficiales de Grado (PAEG)

Matemáticas II – Junio 2010 – Propuesta B

Propuesta B. Ejercicio 1

Enunciado:

La velocidad de una partícula, medida en m/sg, está determinada en función del tiempo $t \geq 0$, medido en segundos, por la expresión $v(t) = (t^2 + 2t)e^{-t}$. Se pide:

a) ¿En qué instante de tiempo del intervalo $[0,\ 3]$ se alcanza la velocidad máxima?

b) Calcula $\lim\limits_{t\to\infty} v(t)$, e interpreta el resultado obtenido.

Solución:

a) Derivemos: $v'(t) = (2t+2)\cdot e^{-t} + (t^2+2t)\cdot e^{-t}\cdot(-1) = e^{-t}(2t+2-t^2-2t) = e^{-t}(2-t^2)$. Los puntos críticos o singulares (aquellos que es posible que sean extremos relativos) se encuentran entre las soluciones de la ecuación $v'(t) = 0$, es decir, $e^{-t}(2-t^2) = 0 \Leftrightarrow 2 - t^2 = 0 \Leftrightarrow t^2 = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 = \sqrt{2} \\ t_2 = -\sqrt{2} \end{cases}$ (la función exponencial no se anula nunca).

El primero de los valores anteriores se encuentra en el intervalo $[0,\ 3]$. Veamos que es un máximo. Para ello debemos evaluar $t_1 = \sqrt{2}$ en la segunda derivada.

$v''(t) = -e^{-t}(2-t^2) + e^{-t}(-2t) = e^{-t}(t^2-2t-2)$.

$v''(\sqrt{2}) = e^{-\sqrt{2}}\left(\sqrt{2}^2 - 2\sqrt{2} - 2\right) = -2\sqrt{2}\cdot e^{-\sqrt{2}} < 0 \Rightarrow t = \sqrt{2}$ es un máximo relativo. Por tanto la velocidad máxima se alcanza en el instante $t = \sqrt{2}$ segundos.

Por cierto, dicha velocidad máxima será $v(\sqrt{2}) = \left(\sqrt{2}^2 + 2\sqrt{2}\right)e^{-\sqrt{2}} = \left(2 + 2\sqrt{2}\right)e^{-\sqrt{2}} \simeq 1{,}17\ m/seg$.

b) $\lim\limits_{t\to\infty} v(t) = \lim\limits_{t\to\infty}(t^2+2t)e^{-t} = \lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{t^2+2t}{e^t} = 0$. La razón de que el límite anterior sea cero es que el infinito de denominador es de "orden superior" que el infinito del numerador, pues el numerador es una función polinómica y el denominador una exponencial. También se podría aplicar la regla de L'Hôpital un par de veces:

$\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{t^2+2t}{e^t} = \lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{2t+2}{e^t} = \lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{2}{e^t} = \dfrac{2}{\infty} = 0$.

La interpretación del resultado es que la recta $y = 0$ (el eje X), es una asíntota horizontal, con lo que, cuando $x \to +\infty$, la gráfica de la función se acerca indefinidamente al eje X sin llegar a tocarlo.

Propuesta B. Ejercicio 2

Enunciado:

Calcula la integral indefinida: $\displaystyle\int \frac{\cos x}{1 + \operatorname{sen}^2 x}\,dx$.

(Nota: Puedes probar el cambio de variable $y = \operatorname{sen} x$).

Solución:

$$\int \frac{\cos x}{1+\operatorname{sen}^2 x}\,dx=\left[y=\operatorname{sen}x \Rightarrow dy=\cos x\,dx\right]=\int\frac{1}{1+y^2}\,dy=\operatorname{arctg}y+C=\operatorname{arctg}(\operatorname{sen}x)+C$$

PROPUESTA B. EJERCICIO 3

Enunciado:

Consideremos las matrices $A=\begin{pmatrix}2&1\\0&1\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}2&a-3\\b+2&c\end{pmatrix}$. Determina los valores $a,\,b,\,c\in\mathbb{R}$ de forma que se cumpla que el determinante de la matriz B sea igual a 8, y además se verifique que $A\cdot B=B\cdot A$.

Solución:

$$|B|=\begin{vmatrix}2&a-3\\b+2&c\end{vmatrix}=(2c)-(a-3)(b+2)=2c-ab-2a+3b+6.$$

Como $|B|=8\Rightarrow 2c-ab-2a+3b+6=8\Rightarrow 2c-ab-2a+3b=2$.

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}2&1\\0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&a-3\\b+2&c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4+b+2&2a-6+c\\b+2&c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b+6&2a+c-6\\b+2&c\end{pmatrix}$$

$$B\cdot A=\begin{pmatrix}2&a-3\\b+2&c\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&1\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&2+a-3\\2b+4&b+2+c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&a-1\\2b+4&b+c+2\end{pmatrix}$$

Como $A\cdot B=B\cdot A\Rightarrow\begin{pmatrix}b+6&2a+c-6\\b+2&c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&a-1\\2b+4&b+c+2\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}b+6=4\\2a+c-6=a-1\\b+2=2b+4\\c=b+c+2\end{cases}$

De la primera y de la tercera ecuación se deduce fácilmente que $b=-2$. Sustituyendo en la cuarta $c=-2+c+2$ que es una identidad cierta pero no proporciona más información sobre el valor de c.

Sustituyendo en la igualdad $2c-ab-2a+3b=2$, se tiene que $2c+2a-2a-6=2\Rightarrow 2c=8\Rightarrow c=4$.

Sustituyendo ahora este valor de c en $2a+c-6=a-1$, tenemos finalmente que $2a+4-6=a-1\Rightarrow a=1$.

PROPUESTA B. EJERCICIO 4

Enunciado:

Dado el plano $\pi\equiv x+z=4$ y el punto $P(1,\,1,\,0)$, se pide:

a) Encuentra la ecuación general del plano π' paralelo a π que pasa por P.
b) Halla unas ecuaciones paramétricas de la recta r perpendicular a π que pasa por P.

Solución:

a) Como π y π' son paralelos se tiene que $\pi'\equiv x+z=D$. Además, como $P(1,\,1,\,0)\in\pi'\Rightarrow 1+0=D\Rightarrow D=1$ y, por tanto, $\pi'\equiv x+z=1$.

b) Un vector perpendicular al plano π es $\vec{v}=(1,\,0,\,1)$. Por tanto las ecuaciones paramétricas de la recta r son:

$$r\equiv\begin{cases}x=1+\lambda\\y=1\\z=\lambda\end{cases}$$