Pruebas de Acceso a Enseñanzas Universitarias Oficiales de Grado (PAEG)

Matemáticas II – Septiembre 2012 – Propuesta A

Propuesta A. Ejercicio 1

Enunciado:

a) Enuncia el Teorema de Bolzano y el Teorema de Rolle.

b) Demuestra, usando el Teorema de Bolzano, que existen al menos tres raíces reales distintas de la ecuación

$$x^5-5x+3=0$$

c) Demuestra, usando el Teorema de Rolle, que la ecuación anterior no puede tener más de tres raíces reales distintas.

Solución:

a) **Teorema de Bolzano.**

Si f es una función continua en un intervalo $[a,\, b]$ y $\text{signo}\, f(a)\neq \text{signo}\, f(b)$, entonces existe al menos un número real c perteneciente al intervalo $(a,\, b)$ tal que $f(c)=0$.

Teorema de Rolle.

Si f es una función continua en un intervalo cerrado $[a,\, b]$, derivable en el abierto $(a,\, b)$ y, además, $f(a)=f(b)$, entonces existe al menos un número real $c\in(a,\, b)$ tal que $f'(c)=0$.

b) Sea la función $f(x)=x^5-5x+3$. Esta función, por ser polinómica, está definida y es continua en todo $\mathbb{R}$. Además se tiene que:

$$f(-2)=(-2)^5-5(-2)+3=-32+10+3=-19$$

$$f(-1)=(-1)^5-5\cdot(-1)+3=-1+5+3=7$$

$$f(1)=1^5-5\cdot 1+3=1-5+3=-1$$

$$f(2)=2^5-5\cdot 2+3=32-10+3=25$$

Por tanto, en los intervalos $[-2,\, -1]$, $[-1,\, 1]$, $[1,\, 2]$, la función cambia de signo en los extremos de cada uno de ellos. Aplicando el Teorema de Bolzano, existen al menos $c_1\in(-2,\, -1)$, $c_2\in(-1,\, 1)$, $c_3\in(1,\, 2)$ tales que $f(c_1)=0$, $f(c_2)=0$ y $f(c_3)=0$, es decir tales que $c_1^{\,5}-5c_1+3=0$, $c_2^{\,5}-5c_2+3=0$ y $c_3^{\,5}-5c_3+3=0$. Hemos demostrado pues, tal y como queríamos, que existen al menos tres raíces reales distintas de la ecuación $x^5-5x+3=0$.

c) Supongamos que existe $c_4\in\mathbb{R}$ distinto de c_1, c_2 y c_3 tal que $f(c_4)=0=f(c_1)=f(c_2)=f(c_3)$.

Supongamos, para fijar ideas, que $c_1<c_2<c_3<c_4$. Si los números c_1, c_2, c_3 y c_4 estuvieran ordenados de otra manera la demostración se haría exactamente lo mismo.

Entonces, por el Teorema de Rolle, existe al menos un número real $x_1 \in (c_1, c_2)$ tal que $f'(x_1)=0$; al menos un número real $x_2 \in (c_2, c_3)$ tal que $f'(x_2)=0$; y al menos un número real $x_3 \in (c_3, c_4)$ tal que $f'(x_3)=0$ Pero esto es imposible pues $f'(x)=0 \Leftrightarrow 5x^4-5=0$, sólo admite dos raíces reales: 1 y -1.

Hemos demostrado pues, por reducción al absurdo, que la ecuación $x^5-5x+3=0$ no puede tener más de tres raíces reales ya que, en ese caso, $f'(x)=0 \Leftrightarrow 5x^4-5=0$ tendría más de dos raíces reales y eso es, tal y como se ha visto, una contradicción.

PROPUESTA A. EJERCICIO 2

Enunciado:

Calcula las siguientes integrales:

$$\int \operatorname{sen}^2 x \cos x \, dx \qquad\qquad \int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$$

Solución:

- $\displaystyle\int \operatorname{sen}^2 x \cos x \, dx = \frac{1}{3}\int 3\operatorname{sen}^2 x \cos x \, dx = \frac{1}{3}\operatorname{sen}^3 x + C$.
- $\displaystyle\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx = 2\int e^{\sqrt{x}} \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = 2e^{\sqrt{x}} + C$.

PROPUESTA A. EJERCICIO 3

Enunciado:

Sabiendo que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 5$, calcula el valor de los determinantes

$$\begin{vmatrix} b & b+a & 2c \\ e & e+d & 2f \\ h & h+g & 2i \end{vmatrix} \qquad\qquad \begin{vmatrix} a+d+g & b+e+h & c+f+i \\ d+g & e+h & f+i \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

Indicando las propiedades que se usan en cada caso para justificar tu respuesta.

Solución:

- $\begin{vmatrix} b & b+a & 2c \\ e & e+d & 2f \\ h & h+g & 2i \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} \begin{vmatrix} b & b & 2c \\ e & e & 2f \\ h & h & 2i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & a & 2c \\ e & d & 2f \\ h & g & 2i \end{vmatrix} \overset{(2)}{=} \begin{vmatrix} b & a & 2c \\ e & d & 2f \\ h & g & 2i \end{vmatrix} \overset{(3)}{=} -\begin{vmatrix} a & b & 2c \\ d & e & 2f \\ g & h & 2i \end{vmatrix} \overset{(4)}{=} -2\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = -2\cdot 5 = -10$

  Propiedades utilizadas:

  (1) Si dos determinantes tienen todos sus elementos iguales salvo, a lo sumo, los de una fila o columna, entonces se pueden sumar, dando como resultado otro determinante con la misma parte común y con el resultado de sumar las dos líneas respectivas.

  (2) Un determinante con dos filas o dos columnas iguales vale cero.

  (3) Si en un determinante se intercambian entre sí dos filas o dos columnas el determinante conserva el mismo valor absoluto, pero cambia de signo.

  (4) Si en un determinante multiplicamos todos los términos de una fila o de una columna por un número, el valor del determinante queda multiplicado por dicho número.

- $$\begin{vmatrix} a+d+g & b+e+h & c+f+i \\ d+g & e+h & f+i \\ g & h & i \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} \begin{vmatrix} a & b & c \\ d+g & e+h & f+i \\ g & h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} d+g & e+h & f+i \\ d+g & e+h & f+i \\ g & h & i \end{vmatrix} \overset{(2)}{=} \begin{vmatrix} a & b & c \\ d+g & e+h & f+i \\ g & h & i \end{vmatrix} \overset{(3)}{=}$$

$$\overset{(3)}{=} \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & d \\ g & h & i \\ g & h & i \end{vmatrix} \overset{(4)}{=} \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 5$$

Propiedades utilizadas:

(1) Si dos determinantes tienen todos sus elementos iguales salvo, a lo sumo, los de una fila o columna, entonces se pueden sumar, dando como resultado otro determinante con la misma parte común y con el resultado de sumar las dos líneas respectivas.

(2) Un determinante con dos filas o dos columnas iguales vale cero.

(3) Si dos determinantes tienen todos sus elementos iguales salvo, a lo sumo, los de una fila o columna, entonces se pueden sumar, dando como resultado otro determinante con la misma parte común y con el resultado de sumar las dos líneas respectivas.

(4) Un determinante con dos filas o dos columnas iguales vale cero.

PROPUESTA A. EJERCICIO 4

Enunciado:

Dado el plano $\pi \equiv x+y+2z=7$ y el punto $P(1,\ 0,\ 0)$:

a) Calcula el punto Q de π que hace mínima la distancia a P.

b) Calcula el punto simétrico P' de P respecto al plano π.

Solución:

a) El punto Q será la intersección de la recta r perpendicular al plano π que pasa por P, con el propio plano π. Un vector perpendicular a π es $\vec{u}=(1,\ 1,\ 2)$. Por tanto, la recta perpendicular a π que pasa por P es, en paramétricas: $r \equiv \begin{cases} x=1+\lambda \\ y=\lambda \\ z=2\lambda \end{cases}$. Sustituyendo en la ecuación del plano: $1+\lambda+\lambda+2\cdot 2\lambda=7 \Rightarrow 6\lambda=6 \Rightarrow \lambda=1$.

De este modo el punto que se pide es $Q(2,\ 1,\ 2)$.

b) El punto P', simétrico de P respecto del plano π, debe pertenecer a la recta r y estar a la misma distancia de Q que P:

$$d(P,Q)=d(P',Q) \Leftrightarrow \sqrt{(2-1)^2+(1-0)^2+(2-0)^2} = \sqrt{(1+\lambda-2)^2+(\lambda-1)^2+(2\lambda-2)^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{6}=\sqrt{6(\lambda-1)^2} \Leftrightarrow \sqrt{6}=\sqrt{6}\cdot\sqrt{(\lambda-1)^2} \Leftrightarrow 1=\lambda-1 \Leftrightarrow \lambda=2$$

Así el punto P', simétrico de P respecto del plano π, es $P'(3,\ 2,\ 4)$.

También se puede, y quizá más fácilmente, sabiendo que el punto P' debe cumplir $\frac{P+P'}{2}=Q$. Llamando $P'(a,\ b,\ c)$, se tiene:

$$\frac{(1,\ 0,\ 0)+(a,\ b,\ c)}{2}=(2,\ 1,\ 2) \Leftrightarrow (1,\ 0,\ 0)+(a,\ b,\ c)=(4,\ 2,\ 4) \Leftrightarrow (a,\ b,\ c)=(3,\ 2,\ 4)$$