Evaluación para Acceso a la Universidad

Matemáticas II (Universidad de Castilla-La Mancha) – junio 2017 – Propuesta A

EJERCICIO 1

Enunciado:

Dada la función

$$f(x)=\begin{cases} x^2+a & \text{si} \quad x\le 2 \\ -x^2+bx-9 & \text{si} \quad x>2 \end{cases}$$

a) Calcula razonadamente los parámetros a y b para que $f(x)$ sea derivable en todo $\mathbb{R}$. **(1,5 puntos)**

b) Enuncia el teorema de Rolle y comprueba si, para los valores hallados en el apartado anterior, la función $f(x)$ verifica las hipótesis del teorema en el intervalo $[-2,6]$.

Solución:

a) Para que f sea continua en todo $\mathbb{R}$ ha de ser continua en $x=2$ (en el resto de puntos es continua por tratarse de funciones polinómicas). Para ello debe existir el límite de la función en $x=2$ y coincidir con la imagen de la función en dicho punto. Y para que exista el límite en $x=2$ deben existir los límites laterales y ser iguales. Es decir:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}\left(x^2+a\right)=4+a=f(2) \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}\left(-x^2+bx-9\right)=2b-13 \end{array}\right\}\Rightarrow 4+a=2b-13$$

La función derivada de f, exceptuando el punto $x=2$, es la siguiente:

$$f'(x)=\begin{cases} 2x & \text{si} \quad x<2 \\ -2x+b & \text{si} \quad x>2 \end{cases}$$

Para que exista la derivada en $x=2$ deben existir las derivadas laterales en dicho punto y ser iguales:

$$f'\left(2^-\right)=f'\left(2^+\right)\Rightarrow 4=-4+b\Rightarrow b=8$$

Entonces $4+a=2\cdot 8-13\Rightarrow 4+a=3\Rightarrow a=-1$.

Resumiendo, para que $f(x)$ sea derivable en todo $\mathbb{R}$ debe ser $a=-1$ y $b=8$.

b) Enunciado del teorema de Rolle.

"Sea f una función continua en un intervalo cerrado $[a,b]$ y derivable en el abierto (a,b). Si $f(a)=f(b)$, existe algún punto $c\in(a,b)$ tal que $f'(c)=0$".

Para los valores hallados en el apartado a) la función queda de la siguiente manera:

$$f(x)=\begin{cases} x^2-1 & \text{si} \quad x\le 2 \\ -x^2+8x-9 & \text{si} \quad x>2 \end{cases}$$

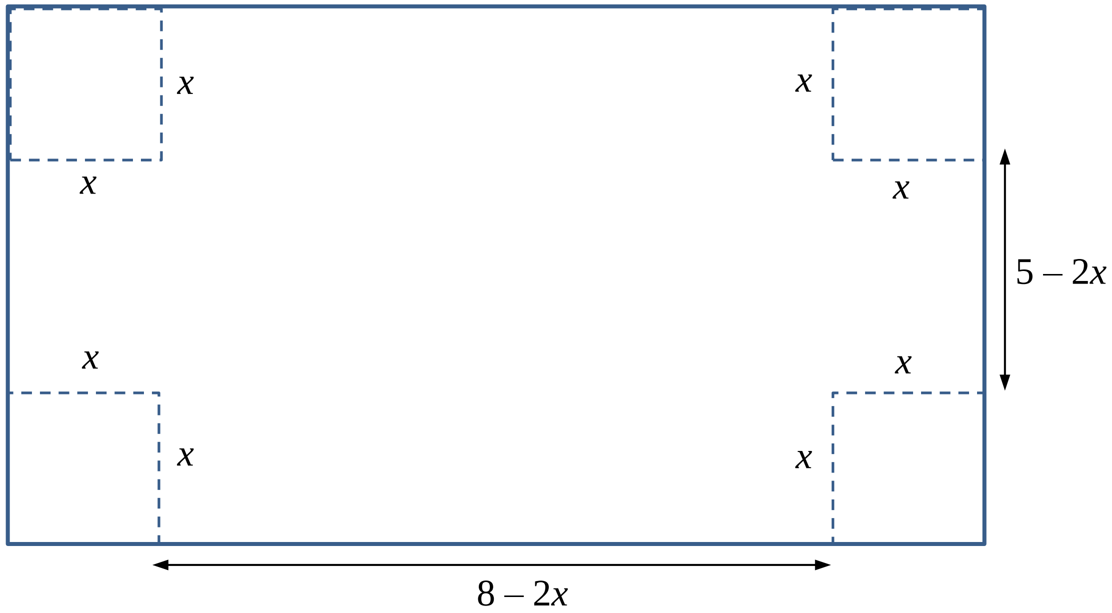
Según se ha visto, la función anterior es continua y derivable en todo $\mathbb{R}$, en particular será continua en $[-2,6]$ y derivable en $(-2,6)$. Además $f(-2)=3=f(6)$. Entonces se verifican todas las hipótesis del teorema de Rolle, con lo que debe existir $c\in(-2,6)$ tal que $f'(c)=0$.

EJERCICIO 2

Enunciado:

Con una chapa metálica de 8 × 5 metros se desea construir, cortando cuadrados en las esquinas, un cajón sin tapa de volumen máximo. Halla razonadamente las dimensiones de dicho cajón. **(2,5 puntos)**

Solución:



Si cortamos cuadrados de lado x en las esquinas, los lados de la base de la caja medirán $8-2x$ metros y $5-2x$ metros, tal y como se aprecia en la figura anterior. La altura de la caja será pues de x metros. De este modo, el volumen de la caja vendrá dado por

$$V = x(8-2x)(5-2x) = 4x^3 - 26x^2 + 40x$$

Derivemos e igualemos a cero la derivada para extraer los posibles extremos de la función volumen:

$$V' = 12x^2 - 52x + 40 \ ; \ V' = 0 \Leftrightarrow 12x^2 - 52x + 40 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{10}{3} \\ x = 1 \end{cases}$$

Para decidir cuál de los dos es el máximo evaluemos en la segunda derivada, que es $V'' = 24x - 52$:

$V''\left(\dfrac{10}{3}\right) = 24 \cdot \dfrac{10}{3} - 52 = 80 - 52 = 28 > 0$. Entonces $x = \dfrac{10}{3}$ es un mínimo.

$V''(1) = 24 \cdot 1 - 52 = -28 < 0$. Entonces $x = 1$ es un máximo.

Por tanto, las dimensiones del cajón para que el volumen sea máximo serán 6 × 3 metros de la base y 1 metro de altura.

EJERCICIO 3

Enunciado:

a) Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$

$$\left.\begin{aligned} ax - y + z &= a - 4 \\ 2x + y - az &= a - 1 \\ y - z &= -3 \end{aligned}\right\} \qquad \textbf{(1,5 puntos)}$$

b) Resuélvelo razonadamente para el valor $a = -1$. **(1 punto)**

Solución:

a) La matriz de los coeficientes es $A=\begin{pmatrix} a & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -a \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, cuyo rango es al menos dos pues contiene un menor de orden dos distinto de cero: $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=2-0=2\neq 0$. Además, $|A|=(-a+2)-(2-a^2)=a^2-a$, de donde deducimos que $|A|=0 \Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ a=1 \end{cases}$. Ahora podemos hacer las siguientes consideraciones según los valores del parámetro a:

- Si $a\neq 0$ y $a\neq 1$ el determinante de la matriz A es distinto de cero, con lo que $rg(A)=3=rg(A')=n$, donde A' denota la matriz ampliada y n el número de incógnitas del sistema. En este caso el sistema es compatible determinado (solución única).
- Si $a=0$ la matriz ampliada es $A'=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & -4 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$. Orlando con el menor $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=2-0=2\neq 0$, tenemos que $\begin{vmatrix} 0 & -1 & -4 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix}=-8-6=-14\neq 0$. Por tanto, en este caso $rg(A)=2\neq rg(A')=3$, con lo que el sistema es incompatible (no tiene soluciones).
- Si $a=1$ la matriz ampliada es $A'=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$. Volviendo a orlar con el menor $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$, tenemos que $\begin{vmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix}=(-3-6)-6=-15\neq 0$. En este caso volvemos a tener que $rg(A)=2\neq rg(A')=3$, con lo que el sistema vuelve a ser incompatible.

b) Para $a=-1$ el sistema es compatible determinado. Tenemos que $|A|=(-1)^2-(-1)=1+1=2$. Aplicando la regla de Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} -5 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{2}=\frac{(5+3-2)-(-3-2-5)}{2}=\frac{6+10}{2}=\frac{16}{2}=8$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} -1 & -5 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & -1 \end{vmatrix}}{2}=\frac{(-2-6)-(10+3)}{2}=\frac{-8-13}{2}=-\frac{21}{2}$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix}-1&-1&-5\\2&1&-2\\0&1&-3\end{vmatrix}}{2}=\frac{(3-10)-(6+2)}{2}=\frac{-7-8}{2}=-\frac{15}{2}$$

EJERCICIO 4

Enunciado:

Dado el punto $P(2,0,-1)$ y las rectas

$$r\equiv\frac{x-2}{-1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z}{0}\quad\text{y}\quad s\equiv\begin{cases}x-y+2z+4=0\\x+z+1=0\end{cases}$$

a) Determina razonadamente la posición relativa de las rectas r y s. **(1,5 puntos)**

b) Encuentra razonadamente la ecuación general del plano que pasando por P es paralelo a r y a s. **(1 punto)**

Solución:

a) Un punto y un vector director de la recta r son, respectivamente, $A(2,-1,0)$ y $\vec{u}=(-1,2,0)$.

Las ecuaciones paramétricas de la recta s son $s\equiv\begin{cases}x=-1-\lambda\\y=3+\lambda\\z=\lambda\end{cases}$. Entonces, un punto y un vector director de la recta s son, respectivamente, $B(-1,3,0)$ y $\vec{v}=(-1,1,1)$.

El rango de la matriz formada por los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ es $rg\begin{pmatrix}\vec{u}\\\vec{v}\end{pmatrix}=rg\begin{pmatrix}-1&2&0\\-1&1&1\end{pmatrix}=2$, pues podemos encontrar un menor de orden dos distinto de cero, por ejemplo, $\begin{vmatrix}-1&2\\-1&1\end{vmatrix}=-1-(-2)=-1+2=1\neq 0$. Esto quiere decir que los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ tienen distinta dirección y, por tanto, las rectas r y s no pueden ser ni paralelas ni coincidentes.

Estudiemos ahora el rango de la matriz formada por los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\overrightarrow{AB}=(-3,4,0)$:

$$rg\begin{pmatrix}\vec{u}\\\vec{v}\\\overrightarrow{AB}\end{pmatrix}=rg\begin{pmatrix}-1&2&0\\-1&1&1\\-3&4&0\end{pmatrix}=3\text{, ya que }\begin{vmatrix}-1&2&0\\-1&1&1\\-3&4&0\end{vmatrix}=-6-(-4)=-6+4=-2\neq 0$$

De lo anterior se deduce que los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\overrightarrow{AB}$ son linealmente independientes, es decir, no pueden ser coplanarios, con lo que las rectas r y s no pueden ser secantes.

Solamente queda una posibilidad: r y s se cruzan.

b) Para que el plano π que pasa por $P(2,0,-1)$ sea paralelo a r y a s, basta que tenga las direcciones de r y de s. Es decir:

$$\pi\equiv\begin{vmatrix}x-2&y&z+1\\-1&2&0\\-1&1&1\end{vmatrix}=(2x-4-z-1)-(-2z-2-y)=0\Rightarrow\pi\equiv 2x+y+z-3=0$$

EJERCICIO 5

Enunciado:

a) Los operarios A, B y C producen, respectivamente, el 50 %, el 30 % y el 20 % de las resistencias que se utilizan en un laboratorio de electrónica. Resultan defectuosas el 6 % de las resistencias producidas por A, el 5 % de las producidas por B y el 3 % de las producidas por C. Se selecciona al azar una resistencia:

   a1) Calcula razonadamente la probabilidad de que sea defectuosa. **(0,75 puntos)**

   a2) Si es defectuosa, calcula razonadamente la probabilidad de que proceda del operario A. **(0,5 puntos)**

b) Las resistencias se empaquetan al azar en cajas de cinco unidades. Calcula razonadamente la probabilidad de:

   b1) Que en una caja haya exactamente tres resistencias fabricadas por B. **(0,75 puntos)**

   b2) Que en una caja haya al menos dos fabricadas por B. **(0,5 puntos)**

Solución:

a) Llamemos A, B y C a los sucesos "elegida una resistencia al azar, es producida por el operario A, B y C, respectivamente". Entonces $P(A)=0,50$, $P(B)=0,30$ y $P(C)=0,20$.

Llamemos ahora D al suceso "la resistencia elegida es defectuosa". Entonces, según el enunciado, tenemos las siguientes probabilidades condicionadas: $P(D/A)=0,06$, $P(D/B)=0,05$, $P(D/C)=0,03$.

Usando el teorema de la probabilidad total tenemos que la probabilidad de que una pieza sea defectuosa es:

$$P(D)=P(D\cap A)+P(D\cap B)+P(D\cap C)=P(A)\cdot P(D/A)+P(B)\cdot P(D/B)+P(C)\cdot P(D/C)=$$

$$=0,50\cdot 0,06+0,30\cdot 0,05+0,20\cdot 0,03=0,03+0,015+0,006=0,051$$

Si es defectuosa, la probabilidad de que proceda del operario A viene dada por la siguiente probabilidad condicionada (teorema de Bayes):

$$P(A/D)=\frac{P(A\cap D)}{P(D)}=\frac{P(A)\cdot P(D/A)}{P(D)}=\frac{0,50\cdot 0,06}{0,051}=\frac{0,03}{0,051}\cong 0,588$$

b) Para calcular las probabilidades que se piden supondremos que se trata de un experimento binomial. Solo se pueden dar dos posibilidades: o la pieza está producida por B o no está producida por B. Tomaremos por éxito que la pieza esté producida por B. Entonces $p=P(B)=0,30$. Además $n=5$ pues las resistencias se empaquetan al azar en cajas de cinco unidades. Tenemos pues que la variable X número de éxitos (número de piezas producidas por B) sigue una distribución binomial $B(n,p)=B(5,\ 0,30)$. En general se tiene que

$$P(X=r)=\binom{n}{r}p^r(1-p)^{n-r}$$

La probabilidad en una caja haya exactamente tres resistencias fabricadas por B es:

$$P(X=3)=\binom{5}{3}0,3^3\cdot 0,7^2=10\cdot 0,027\cdot 0,49=0,1323$$

La probabilidad de que en una caja haya al menos dos fabricadas por B es:

$$P(X\geq 2)=1-P(X<2)=1-\left[P(X=0)+P(X=1)\right]=1-\left[\binom{5}{0}0,3^0\cdot 0,7^5+\binom{5}{1}0,3^1\cdot 0,7^4\right]=$$

$$=1-\left[0,16807+0,36015\right]=1-0,52822=0,47178$$