Pruebas de Acceso a Enseñanzas Universitarias Oficiales de Grado (PAEG)

Matemáticas II (Universidad de Castilla-La Mancha) – junio 2016 – Propuesta A

EJERCICIO 1

Enunciado:

Dada la función $f(x)=x^3+3x^2+ax-6$, $a\in\mathbb{R}$, se pide:

a) Determinar el valor del parámetro $a\in\mathbb{R}$ para que la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en su punto de inflexión sea -3. **(1,25 puntos)**

b) Para el valor del parámetro encontrado, calcular los extremos relativos e intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$. **(1,25 puntos)**

Solución:

a) Derivemos f dos veces. $f'(x)=3x^2+6x+a$, $f''(x)=6x+6$. Igualemos la segunda derivada a cero. Las soluciones serán posibles puntos de inflexión. $f''(x)=0\Leftrightarrow 6x+6=0\Leftrightarrow 6x=-6\Leftrightarrow x=-1$. La derivada de orden tres es $f'''(x)=6$, que es distinta de cero sea quien sea x. Entonces, el punto de inflexión es $x=-1$.

La pendiente de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en su punto de inflexión es la derivada de la función en $x=-1$, es decir, $f'(-1)=3(-1)^2+6(-1)+a=3-6+a=a-3$. Entonces $a-3=-3$, con lo que $a=0$.

b) Para $a=0$ es $f'(x)=3x^2+6x$. Entonces $f'(x)=0\Leftrightarrow 3x^2+6x=0\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\\x=-2\end{cases}$. Estudiemos el signo de la primera derivada en los intervalos $(-\infty,-2)$, $(-2,0)$ y $(0,+\infty)$:

	$(-\infty,-2)$	$(-2,0)$	$(0,+\infty)$
signo de f'	$+$	$-$	$+$
monotonía	$\uparrow\uparrow$	$\downarrow\downarrow$	$\uparrow\uparrow$

Por tanto f es estrictamente creciente en $(-\infty,-2)\cup(0,+\infty)$ y estrictamente decreciente en $(-2,0)$.

En el punto $x=-2$ f alcanza un máximo relativo, concretamente en el punto de coordenadas $(-2,-2)$.

En el punto $x=0$ f alcanza un mínimo relativo, concretamente en el punto de coordenadas $(0,-6)$.

EJERCICIO 2

Enunciado:

Calcula la integral definida

$$\int_0^{\frac{\pi^2}{4}}\frac{\cos\sqrt{x}}{2}\,dx \qquad \textbf{(2,5 puntos)}$$

Nota: Puede ayudarte hacer el cambio de variable $t=\sqrt{x}$ y a continuación aplicar integración por partes.

Solución:

Tal y como se sugiere, primero aplicaremos el cambio de variable y luego integraremos por partes.

$$\int \frac{\cos\sqrt{x}}{2}\,dx = \frac{1}{2}\int \cos\sqrt{x}\,dx = \left[\sqrt{x}=t \Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx = dt \Rightarrow dx = 2tdt\right] = \frac{1}{2}\int 2t\cos t\,dt = \int t\cos t\,dt =$$

$$= \begin{bmatrix} u=t & du=dt \\ dv=\cos t\,dt & v=\operatorname{sen} t \end{bmatrix} = t\operatorname{sen} t - \int \operatorname{sen} t\,dt = t\operatorname{sen} t + \cos t + C\,.$$

Deshaciendo el cambio:

$$\int \frac{\cos\sqrt{x}}{2}\,dx = \sqrt{x}\operatorname{sen}\sqrt{x} + \cos\sqrt{x} + C\,.$$

Entonces:

$$\int_0^{\frac{\pi^2}{4}} \frac{\cos\sqrt{x}}{2}\,dx = \left[\sqrt{x}\operatorname{sen}\sqrt{x} + \cos\sqrt{x}\right]_0^{\frac{\pi^2}{4}} = \left(\sqrt{\frac{\pi^2}{4}}\operatorname{sen}\sqrt{\frac{\pi^2}{4}} + \cos\sqrt{\frac{\pi^2}{4}}\right) - \left(\sqrt{0}\operatorname{sen}\sqrt{0} + \cos\sqrt{0}\right) =$$

$$\left(\frac{\pi}{2}\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} + \cos\frac{\pi}{2}\right) - \cos 0 = \frac{\pi}{2} - 1.$$

EJERCICIO 3

Enunciado:

a) Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} x - y + mz = 0 \\ 4x - 3y + 2z = m \\ -mx + y - z = 1 - m \end{cases} \qquad \textbf{(1,5 puntos)}$$

b) Calcula la solución cuando el sistema sea compatible indeterminado. **(1 punto)**

Solución:

a) La matriz de los coeficientes y la matriz ampliada son, respectivamente:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & m \\ 4 & -3 & 2 \\ -m & 1 & -1 \end{pmatrix} \; ; \; A\,|\,b = \begin{pmatrix} 1 & -1 & m & 0 \\ 4 & -3 & 2 & m \\ -m & 1 & -1 & 1-m \end{pmatrix}$$

El rango de A es al menos dos porque contiene un menor de orden dos distinto de cero: $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = -3 + 4 = 1 \neq 0$.

Además, $|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & m \\ 4 & -3 & 2 \\ -m & 1 & -1 \end{vmatrix} = (3 + 2m + 4m) - (3m^2 + 4 + 2) = -3m^2 + 6m - 3 = -3(m-1)^2$.

Entonces $|A| = 0 \Leftrightarrow -3(m-1)^2 = 0 \Leftrightarrow m = 1$.

De lo anterior deducimos que:

- Si $m \neq 1$, $|A| \neq 0$, con lo que $\operatorname{rango} A = \operatorname{rango} A\,|\,b = 3 = n$ (n indica el número de incógnitas), y el sistema es compatible determinado (solución única).

- Si $m=1$, el rango de la matriz de los coeficientes es dos. La matriz ampliada es $A|b=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1 & 0\\ 4 & -3 & 2 & 1\\ -1 & 1 & -1 & 0\end{pmatrix}$, cuyo rango también es dos pues la tercera fila es proporcional a la primera. En este caso tenemos por tanto que $\text{rango}\, A=\text{rango}\, A|b=2<3=n$, con lo que el sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones).

b) Resolveremos el sistema en los dos casos: cuando sea compatible determinado y cuando sea compatible indeterminado.

Supongamos que $m\neq 1$ (compatible determinado) y apliquemos la regla de Cramer.

$$x=\frac{\begin{vmatrix}0 & -1 & m\\ m & -3 & 2\\ 1-m & 1 & -1\end{vmatrix}}{|A|}=\frac{\left(-2+2m+m^2\right)-\left(-3m+3m^2+m\right)}{-3(m-1)^2}=\frac{-2m^2+4m-2}{-3(m-1)^2}=\frac{-2(m-1)^2}{-3(m-1)^2}=\frac{2}{3}.$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix}1 & 0 & m\\ 4 & m & 2\\ -m & 1-m & -1\end{vmatrix}}{|A|}=\frac{\left(-m+4m-4m^2\right)-\left(-m^3+2-2m\right)}{-3(m-1)^2}=\frac{m^3-4m^2+5m-2}{-3(m-1)^2}=\frac{(m-2)(m-1)^2}{-3(m-1)^2}=\frac{2-m}{3}.$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix}1 & -1 & 0\\ 4 & -3 & m\\ -m & 1 & 1-m\end{vmatrix}}{|A|}=\frac{\left(-3+3m+m^2\right)-\left(-4+4m+m\right)}{-3(m-1)^2}=\frac{m^2-2m+1}{-3(m-1)^2}=\frac{(m-1)^2}{-3(m-1)^2}=-\frac{1}{3}.$$

Supongamos que $m=1$ (compatible indeterminado). En este caso el sistema es el siguiente:

$$\begin{cases}x-y+z=0\\ 4x-3y+2z=1\\ -x+y-z=0\end{cases}$$

Podemos eliminar la última ecuación (es proporcional a la primera), llamar $z=\lambda$ (el grado de libertad es uno) y escribir el sistema, equivalentemente, así:

$$\begin{cases}x-y=-\lambda\\ 4x-3y=1-2\lambda\end{cases}$$

Volvemos a aplicar la regla de Cramer.

$$x=\frac{\begin{vmatrix}-\lambda & -1\\ 1-2\lambda & -3\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & -1\\ 4 & -3\end{vmatrix}}=\frac{3\lambda-(-1+2\lambda)}{1}=\lambda+1\ ;\quad y=\frac{\begin{vmatrix}1 & -\lambda\\ 4 & 1-2\lambda\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & -1\\ 4 & -3\end{vmatrix}}=\frac{1-2\lambda-(-4\lambda)}{1}=2\lambda+1$$

Por tanto las soluciones, en el caso de que el sistema sea compatible indeterminado, las podemos escribir así:

$$(x,y,z)=(\lambda+1,2\lambda+1,\lambda)=(1,1,0)+\lambda(1,2,1)$$

Soluciones infinitas que forman, evidentemente, una recta en el espacio afín.

EJERCICIO 4

Enunciado:

Sea r la recta determinada por el punto $P(1,0,1)$ y el vector $\vec{v}=(1,-1,0)$.

a) Calcula el punto de r más cercano al punto $Q(0,0,1)$. **(1,5 puntos)**

b) Calcula el punto simétrico de Q respecto a r. **(1 puntos)**

Solución:

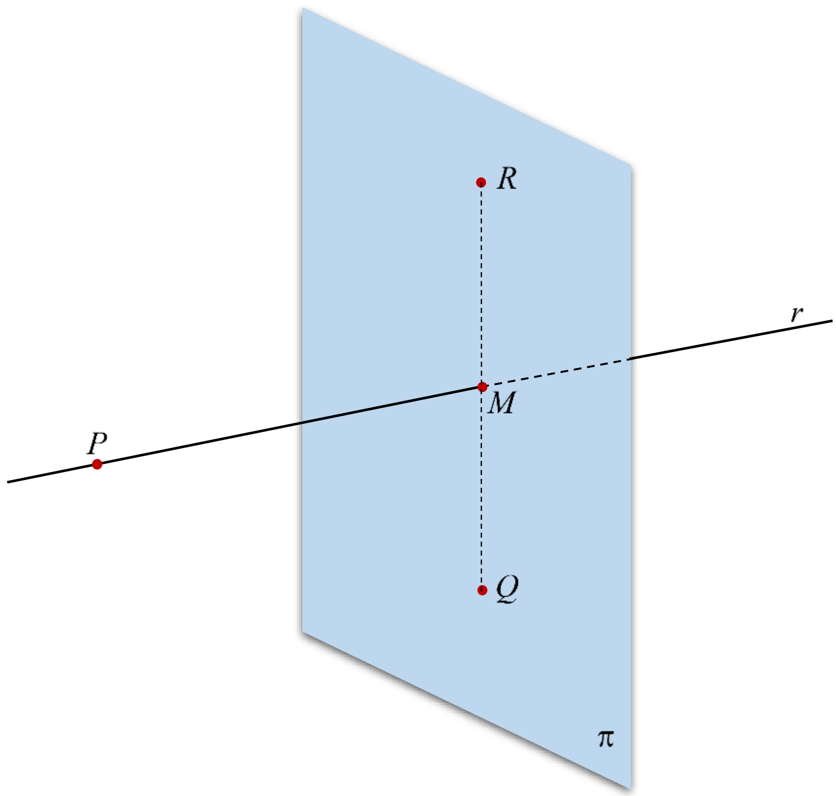
a) Lo haremos de dos formas distintas:

Primera forma.

Las ecuaciones paramétricas de la recta r son: $r\equiv\begin{cases}x=1+\lambda\\ y=-\lambda\\ z=1\end{cases}$. Entonces, un punto cualquiera de r es de la forma $M(1+\lambda,-\lambda,1)$. El punto $M\in r$ más cercano debe cumplir que $\overrightarrow{QM}\perp\vec{v}$, es decir $(1+\lambda,-\lambda,0)\perp(1,-1,0)$, con lo que $1+\lambda+\lambda=0\Rightarrow 2\lambda=-1\Rightarrow\lambda=-\dfrac{1}{2}$. Por tanto, el punto de r más cercano a $Q(0,0,1)$ es $M\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2},1\right)$.

Segunda forma.

Vamos a calcular el plano π perpendicular a la recta r que pasa por el punto $Q(0,0,1)$. Podemos tomar el vector



director de la recta r, $\vec{v}=(1,-1,0)$, como vector perpendicular del plano, con lo que la ecuación del plano será de la forma $\pi\equiv x-y+D=0$. Como $Q\in\pi$, entonces $0-0+D=0\Rightarrow D=0$, con lo que la ecuación del plano es $\pi\equiv x-y=0$.

La recta r y el plano π se han de cortar en un punto M. Vamos a hallarlo. Cualquier punto de r es de la forma $(1+\lambda,-\lambda,1)$ y el que buscamos está en el plano, por lo que $1+\lambda-(-\lambda)=0 \Rightarrow 1+2\lambda=0 \Rightarrow 2\lambda=-1 \Rightarrow \lambda=-\frac{1}{2}$

De aquí obtenemos que $M\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1\right)$.

b) El punto simétrico de $Q(0,0,1)$ respecto de r, que lo vamos a llamar $R(a,b,c)$, tiene claramente como punto medio al punto $M\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1\right)$ (ver figura anterior).

Por tanto $\overrightarrow{QM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{QR}$, es decir, $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\right)=\frac{1}{2}(a,b,c-1)$, de donde, igualando coordenadas, tenemos que $a=1$, $b=1$, $c=1$. Así, el punto simétrico de Q respecto a r es $R(1,1,1)$.