Pruebas de Acceso a Enseñanzas Universitarias Oficiales de Grado (PAEG)

Matemáticas II – Junio 2013 – Propuesta A

PROPUESTA A. EJERCICIO 1

Enunciado:

a) Enuncia el teorema de Bolzano.

b) Razona que las gráficas de las funciones $f(x)=3x^5-10x^4+10x^3+3$ y $g(x)=e^x$ se cortan en algún punto con coordenada de abscisa entre -1 y 0.

c) Calcula los puntos de inflexión de $f(x)$.

Solución:

a) **Teorema de Bolzano.** Si f es una función continua en un intervalo $[a,b]$ y $\text{signo}\, f(a)\neq \text{signo}\, f(b)$, entonces existe un número real c perteneciente al intervalo (a,b) tal que $f(c)=0$.

b) Sea $h(x)=f(x)-g(x)=3x^5-10x^4+10x^3+3-e^x$. La función h es continua en todo $\mathbb{R}$ por ser suma de funciones continuas. Además:

$$h(-1)=-3-10-10+3-e^{-1}=-20-e^{-1}=-\left(20+e^{-1}\right)<0$$

$$h(0)=3-e^0=3-1=2>0$$

Por el Teorema de Bolzano existe un punto $c\in(-1,0)$ tal que $h(c)=0$, es decir, tal que $f(c)-g(c)=0$, o sea $f(c)=g(c)$, con lo que hemos demostrado que las funciones f y g se cortan en el punto de abscisa $x=c$, entre -1 y 0.

c) Hagamos la primera derivada, igualémosla a cero y extraigamos la soluciones de la ecuación correspondiente. $f'(x)=15x^4-40x^3+30x^2$, $f'(x)=0\Leftrightarrow 15x^4-40x^3+30x^2=0\Leftrightarrow 5x^2\left(3x^2-8x+6\right)=0$. Esta ecuación solamente tiene la solución $x=0$, pues la ecuación $3x^2-8x+6=0$ no tiene soluciones reales (su discriminante es menor que cero: $\Delta=64-4\cdot3\cdot6=64-72=-8$).

Hagamos ahora la segunda derivada y procedamos como antes:

$$f''(x)=60x^3-120x^2+60x,$$

$$f''(x)=0\Leftrightarrow 60x^3-120x^2+60x=0\Leftrightarrow 60x\left(x^2-2x+1\right)=0\Leftrightarrow 60x(x-1)^2=0\Leftrightarrow \begin{cases}x=0\\x=1\end{cases}$$

Si estos puntos tienen tercera derivada distinta de cero serán puntos de inflexión:

$$f'''(x)=180x^2-240x+60,\ f'''(0)=60\neq0,\ f'''(1)=180-240+60=0$$

De lo anterior se deduce que $x=0$ es un punto de inflexión. Para ver que no hay ninguno más (o sea, que $x=1$ no lo es), hagamos la cuarta derivada.

$$f^{iv)}(x)=360x-240,\ f^{iv)}(1)=120>0.$$

Por tanto, lo que se puede afirmar del punto $x=1$ es que la función es creciente y convexa en el mismo pues $f'(1)=5>0$ y $f^{iv)}(1)=120>0$.

PROPUESTA A. EJERCICIO 2

Enunciado:

Calcula el valor del parámetro $a \in \mathbb{R},\ a > 0$, para que el valor (en unidades de superficie) del área de la región determinada por la parábola $f(x) = -x^2 + a^2$ y el eje de abscisas, coincida con la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x = -a$.

Solución:

Calculemos los puntos donde la función f corta al eje de abscisas:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow -x^2 + a^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - a^2 = 0 \Leftrightarrow (x+a)(x-a) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -a \\ x = a \end{cases}$$

Entonces el área de la región determinada por la parábola $f(x) = -x^2 + a^2$ y el eje de abscisas es:

$$\int_{-a}^{a} \left(-x^2 + a^2\right) dx = \left[-\frac{x^3}{3} + a^2 x \right]_{-a}^{a} = \left(-\frac{a^3}{3} + a^3 \right) - \left(\frac{a^3}{3} - a^3 \right) = 2a^3 - \frac{2a^3}{3} = \frac{4a^3}{3}$$

La pendiente de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x = -a$, es justamente la derivada de f en el punto de abscisa $x = -a$, o sea, $f'(-a)$. Como $f'(x) = -2x$, entonces $f'(-a) = 2a$.

Entonces:

$$\frac{4a^3}{3} = 2a \Leftrightarrow 4a^3 = 6a \Leftrightarrow 4a^3 - 6a = 0 \Leftrightarrow 2a\left(2a^2 - 3\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ 2a^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow a = \pm\sqrt{\dfrac{3}{2}} \end{cases}$$

Como el valor del parámetro que se pide ha de ser mayor que cero, la solución es $a = \sqrt{\dfrac{3}{2}}$

PROPUESTA A. EJERCICIO 3

Enunciado:

a) Encuentra dos matrices A, B cuadradas de orden 2 que cumplan:

- Su suma es la matriz identidad de orden 2.
- Al restar a la matriz A la matriz B se obtiene la traspuesta de la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

b) Si M es una matriz cuadrada de orden 2 tal que $|M| = 7$, razona cuál es el valor de los determinantes $\left|M^2\right|$ y $|2M|$.

Solución:

a) Las dos condiciones se pueden expresar mediante un sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} A + B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ A - B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \end{array}\right\}$$

Sumando ambas ecuaciones se tiene:

$$2A=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 2 & 5\end{pmatrix}\Rightarrow A=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2 & 3\\ 2 & 5\end{pmatrix}\Rightarrow A=\begin{pmatrix}1 & 3/2\\ 1 & 5/2\end{pmatrix}$$

De manera similar, restando ambas ecuaciones:

$$2B=\begin{pmatrix}0 & -3\\ -2 & -3\end{pmatrix}\Rightarrow B=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & -3\\ -2 & -3\end{pmatrix}\Rightarrow B=\begin{pmatrix}0 & -3/2\\ -1 & -3/2\end{pmatrix}$$

b) Se sabe que el determinante del producto de dos matrices cuadradas es igual al producto de los determinantes de las matrices respectivas. Por tanto:

$$\left|M^2\right|=\left|M\cdot M\right|=|M|\cdot|M|=7\cdot 7=49.$$

Otra propiedad de los determinantes dice que si una fila (o una columna) de un determinante tiene un factor común, éste puede sacarse fuera del determinante.

La matriz $2M$ es el resultado de multiplicar cada fila (o cada columna) de la matriz M por 2. Así pues las dos filas de M (o las dos columnas tendrán al número 2 como factor común, con lo que:

$$|2M|=2^2|M|=4\cdot 7=28.$$

En general, si M es una matriz cuadrada de orden n y k es un número real cualquiera: $|kM|=k^n|M|$.

PROPUESTA A. EJERCICIO 4

Enunciado:

a) Estudia la posición relativa del plano $\pi\equiv x-y-z=a$ y la recta $r\equiv\begin{cases}2x+y+az=0\\ x-2y=0\end{cases}$, en función del parámetro $a\in\mathbb{R}$.

b) Calcula la distancia entre π y r para cada valor de $a\in\mathbb{R}$.

Solución:

a) Estudiemos el sistema conjunto formado por el plano y la recta:

$$\begin{cases}x-y-z=a\\ 2x+y+az=0\\ x-2y=0\end{cases}$$

La matriz de los coeficientes es $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ 2 & 1 & a\\ 1 & -2 & 0\end{pmatrix}$. Su rango es al menos dos pues existe un menor de orden dos distinto de cero: $\begin{vmatrix}1 & -1\\ 2 & 1\end{vmatrix}=1-(-2)=3$.

El determinante de la matriz A es $|A|=\begin{vmatrix}1 & -1 & -1\\ 2 & 1 & a\\ 1 & -2 & 0\end{vmatrix}=(0-a+4)-(-1+0-2a)=a+5$. Entonces el determinante se anula para $a=-5$, con lo que: $\operatorname{rango} A=3\Leftrightarrow a\neq -5$ y $\operatorname{rango} A=2\Leftrightarrow a=-5$.

La matriz ampliada es $B=\begin{pmatrix}1 & -1 & -1 & a\\ 2 & 1 & a & 0\\ 1 & -2 & 0 & 0\end{pmatrix}$.

- Claramente, si $a\neq -5$, $\text{rango}\,A=\text{rango}\,B=3=n$ (número de incógnitas), con lo que el sistema es compatible determinado (solución única). Esto quiere decir que, en este caso, el plano π y la recta r se cortan en un punto.

Veamos qué ocurre si $a=5$.

La matriz ampliada queda de la forma $B=\begin{pmatrix}1 & -1 & -1 & -5\\ 2 & 1 & -5 & 0\\ 1 & -2 & 0 & 0\end{pmatrix}$, cuyo rango es tres pues tiene un menor de orden tres distinto de cero: $\begin{vmatrix}-1 & -1 & -5\\ 1 & -5 & 0\\ -2 & 0 & 0\end{vmatrix}=-50$.

- Por tanto, si $a=-5$, $\text{rango}\,A=2\neq\text{rango}\,B=3$, con lo que el sistema es incompatible (no existe solución). Entonces el plano π y la recta r son paralelos.

b) Hemos visto que si $a\neq -5$, el plano y la recta son secantes, con lo que la distancia entre ambos será nula:

- Si $a\neq -5\Rightarrow d(r,\,\pi)=0$.

Si $a=-5$ el plano y la recta son paralelos y entonces la distancia entre ambos coincidirá con la distancia entre un punto cualquiera de la recta y el plano. En este caso la recta es $r\equiv\begin{cases}2x+y-5z=0\\ x-2y=0\end{cases}$. Es fácil extraer un punto suyo. Si $y=1$, $x=2$. Sustituyendo en la primera ecuación: $4+1-5z=0\Rightarrow 5z=5\Rightarrow z=1$. Así pues un punto de la recta es $P(2,1,1)$. Además el plano es, en este caso, $\pi\equiv x-y-z+5=0$.

La fórmula de la distancia entre una recta r y un plano $\pi\equiv Ax+By+Cz+D=0$ paralelos viene dada por $d(r,\,\pi)=\dfrac{|Aa_1+Ba_2+Ca_3+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$, donde $P(a_1,\,a_2,\,a_3)$ es un punto de la recta. De este modo:

- Si $a=-5\Rightarrow d(r,\,\pi)=\dfrac{|1\cdot 2+(-1)\cdot 1+(-1)\cdot 1+5|}{\sqrt{1^2+(-1)^2+(-1)^2}}=\dfrac{|2-1-1+5|}{\sqrt{3}}=\dfrac{5}{\sqrt{3}}$.