UCLM - Pruebas de Acceso a Enseñanzas Universitarias Oficiales de Grado (PAEG)

Matemáticas II – Junio 2012 – Propuesta A

PROPUESTA A. EJERCICIO 1

Enunciado:

Dada la función $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$, calcula los parámetros $a,\ b,\ c\in\mathbb{R}$ sabiendo que:

- La recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x=-1$ tiene pendiente -3.
- $f(x)$ tiene un punto de inflexión de coordenadas $(1,\ 2)$.

Solución:

Tenemos que $f'(x)=3x^2+2ax+b$ y $f''(x)=6x+2a$.

Como $(1,\ 2)$ es un punto de inflexión, entonces $f''(1)=0\Rightarrow 6\cdot 1+2a=0\Rightarrow 2a=-6\Rightarrow a=-3$. Así, la primera derivada queda $f'(x)=3x^2-6x+b$. Además $f'(-1)=-3$ pues la pendiente en $x=-1$ es -3. Entonces $3(-1)^2-6(-1)+b=-3\Rightarrow 3+6+b=-3\Rightarrow b=-12$. La función es pues $f(x)=x^3-3x^2-12x+c$. Como pasa por el punto $(1,\ 2)$, tenemos finalmente $f(1)=2\Rightarrow 1-3-12+c=2\Rightarrow c=16$.

PROPUESTA A. EJERCICIO 2

Enunciado:

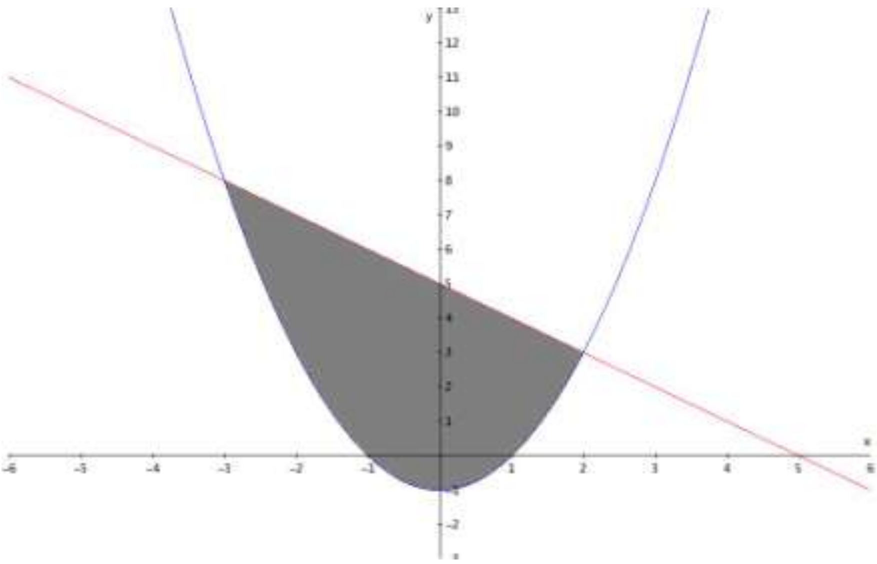
a) Esboza la región encerrada entre la parábola $f(x)=x^2-1$ y la recta $g(x)=5-x$.

b) Calcula el área de la región anterior.

Solución:

a) $f(x)=g(x)\Leftrightarrow x^2-1=5-x\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x^2+x-6=0\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=-3\\x_2=2\end{cases}.$$



b) $\int_{-3}^{2}\left[(5-x)-(x^2-1)\right]dx=\int_{-3}^{2}\left(-x^2-x+6\right)dx=\left[-\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+6x\right]_{-3}^{2}=\left(-\frac{8}{3}-2+12\right)-\left(9-\frac{9}{2}-18\right)=$

$=\frac{22}{3}-\left(-\frac{27}{2}\right)=\frac{125}{6}\ \mathrm{u}^2$.

PROPUESTA A. EJERCICIO 3

Enunciado:

a) Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $m\in\mathbb{R}$

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ x+2y+3z=0 \\ mx+(m+1)y+(m-1)z=m-2 \\ 3z+(m+3)y+4z=m-2 \end{cases}$$

b) Calcula la solución cuando el sistema sea compatible determinado.

Solución:

a) La matriz de los coeficientes es $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ m & m+1 & m-1 \\ 3 & m+3 & 4 \end{pmatrix}$, cuyo rango es al menos 2 pues hay al menos un menor de orden 2 distinto de cero: $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=1$.

Además $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ m & m+1 & m-1 \end{vmatrix}=(2m-2+3m+m+1)-(2m+m-1+3m+3)=-3\neq 0$, lo que demuestra que $rango(A)=3$, $\forall m\in\mathbb{R}$.

La matriz ampliada es $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ m & m+1 & m-1 & m-2 \\ 3 & m+3 & 4 & m-2 \end{pmatrix}$, cuyo rango es, según lo visto en el apartado anterior, por lo menos 3. Si su determinante es cero, no podrá tener rango 4 y en ese caso el sistema será compatible determinado ($rango(A)=rango(B)=n=3$):

$$|B|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ m & m+1 & m-1 & m-2 \\ 3 & m+3 & 4 & m-2 \end{vmatrix}=\{f_3-f_4\}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ m-3 & -2 & m-5 & 0 \\ 3 & m+3 & 4 & m-2 \end{vmatrix}=(m-2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ m-3 & -2 & m-5 \end{vmatrix}=$$

$$=\begin{Bmatrix} c_2-c_1 \\ c_3-c_1 \end{Bmatrix}=(m-2)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ m-3 & 1-m & -2 \end{vmatrix}=(m-2)\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1-m & -2 \end{vmatrix}=(m-2)(2m-4)=2(m-2)^2$$

Entonces $|B|=0 \Leftrightarrow m=2$. Así pues si $m=2$ el sistema es compatible determinado y en caso contrario el sistema es incompatible.

b) Para $m=2$ y eliminando la última ecuación el sistema queda $\begin{cases} x+y+z=0 \\ x+2y+3z=0 \\ 2x+3y+z=0 \end{cases}$, sistema homogéneo, con lo que su única solución es $x=y=z=0$.

PROPUESTA A. EJERCICIO 4

Enunciado:

a) Calcula el área del triángulo cuyos vértices son los puntos de intersección del plano $\pi \equiv x-y+3z=-3$ con los ejes de coordenadas.

b) Si llamamos A, B y C a los vértices del triángulo del apartado anterior, encuentra el valor del parámetro $\lambda \in \mathbb{R}$ para que el tetraedro de vértices A, B, C y $D(-\lambda^2, 2+\lambda, -3)$ tengan volumen mínimo.

Solución:

Los puntos de intersección con los ejes son:

- Con el eje X : $(x,\ 0,\ 0)$. O sea, que haciendo $y=z=0$ se tiene $x=-3$. Por tanto el punto de corte con el eje X es $A(-3,\ 0,\ 0)$.
- Con el eje Y: $(0,\ y,\ 0)$. Haciendo ahora $x=z=0$ tenemos que $-y=-3 \Rightarrow y=3$. Así, el punto de corte con el eje Y es $B(0,\ 3,\ 0)$.
- Con el eje Z: $(0,\ 0,\ z)$. Ahora hemos de hacer $x=y=0$ para obtener que $3z=-3 \Rightarrow z=-1$, con lo que el punto de corte con el eje Z es $C(0,\ 0,\ -1)$.

a) Dados tres puntos del espacio A, B y C, el área S del triángulo cuyos vértices son los puntos A, B y C viene dada por la expresión:

$$S=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|$$

En nuestro caso tenemos que $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{vmatrix}=-3i-(9k-3j)=-3i+3j-9k=(-3,\ 3,\ -9)$ Entonces

$$S=\frac{1}{2}\left|(-3,\ 3,\ -9)\right|=\frac{1}{2}\sqrt{(-3)^2+3^2+(-9)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{99}\ \mathrm{u}^2.$$

b) El volumen V del tetraedro de vértices $A(a_1,\ a_2,\ a_3)$, $B(b_1,\ b_2,\ b_3)$, $C(c_1,\ c_2,\ c_3)$ y $D(d_1,\ d_2,\ d_3)$ viene dado por:

$$V=\left|\begin{vmatrix} b_1-a_1 & b_2-a_2 & b_3-a_3 \\ c_1-a_1 & c_2-a_2 & c_3-a_3 \\ d_1-a_1 & d_2-a_2 & d_3-a_3 \end{vmatrix}\right|=\left|\begin{vmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \\ -\lambda^2+3 & 2+\lambda & -3 \end{vmatrix}\right|=\left|\left(3\lambda^2-9\right)-\left(-27-6-3\lambda\right)\right|=\left|3\lambda^2+3\lambda+24\right|.$$

Ahora un par de consideraciones:

- $\left|3\lambda^2+3\lambda+24\right|=3\lambda^2+3\lambda+24$, ya que $3\lambda^2+3\lambda+24>0,\ \forall\lambda\in\mathbb{R}$, la parábola $y=3\lambda^2+3\lambda+24$ no corta al eje X, y se abre hacia arriba.
- De lo anterior se deduce que el valor mínimo de $3\lambda^2+3\lambda+24$ está en el vértice (también se puede hacer derivando): $\lambda=-\frac{3}{6}=-\frac{1}{2}$, y para este valor el volumen del tetraedro será mínimo. En concreto $V=3\left(-\frac{1}{2}\right)^2+3\left(-\frac{1}{2}\right)+24=\frac{3}{4}-\frac{3}{2}+24=\frac{93}{4}\text{ u}^3$.