UCLM - Pruebas de Acceso a Enseñanzas Universitarias Oficiales de Grado (PAEG)

Matemáticas II – Junio 2011 – Propuesta A

PROPUESTA A. EJERCICIO 1

Enunciado:

Dada la función $f(x)=\dfrac{4x^2+3x+4}{2x}$, se pide:

a) Calcula las asíntotas verticales y oblicuas de $f(x)$.

b) Coordenadas de los máximos y los mínimos relativos de $f(x)$.

Solución:

a) Como la función es racional y el denominador se anula cuando $x=0$, estudiaremos el límite de la función cuando x tiende a cero:

$$\lim_{x\to 0}\frac{4x^2+3x+4}{2x}=\left[\frac{4}{0}\right]=\begin{cases}-\infty & \text{si} \quad x\to 0^- \\ +\infty & \text{si} \quad x\to 0^+\end{cases}\Rightarrow x=0 \text{ es una asíntota vertical.}$$

Veamos si hay alguna asíntota oblicua de la forma $y=mx+n$.

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{4x^2+3x+4}{2x}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{4x^2+3x+4}{2x^2}=2$$

$$n=\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-mx\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{4x^2+3x+4}{2x}-2x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{3x+4}{2x}=\frac{3}{2}$$

Por tanto la asíntota oblicua de la función es $y=2x+\dfrac{3}{2}$.

b) La derivada de f es $f'(x)=\dfrac{(8x+3)\cdot 2x-\left(4x^2+3x+4\right)\cdot 2}{(2x)^2}=\dfrac{8x^2-8}{4x^2}=\dfrac{2x^2-2}{x^2}$.

Igualemos la derivada a cero y extraigamos las soluciones.

$$f'(x)=0\Leftrightarrow\frac{2x^2-2}{x^2}=0\Leftrightarrow 2x^2-2=0\Leftrightarrow x^2=1\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=1\\ x_2=-1\end{cases}$$

Estos son los puntos singulares o críticos, "candidatos" a máximos o mínimos relativos. Haremos la derivada segunda de la función y evaluaremos los puntos singulares en la misma.

$$f''(x)=\frac{4x\cdot x^2-\left(2x^2-2\right)\cdot 2x}{\left(x^2\right)^2}=\frac{4x}{x^4}=\frac{4}{x^3}$$

Entonces:

- $f''(-1)=\dfrac{4}{(-1)^3}=-4<0\Rightarrow x=-1$ es un máximo relativo.

  Como $f(-1)=\dfrac{4(-1)^2+3(-1)+4}{2(-1)}=\dfrac{4-3+4}{-2}=-\dfrac{5}{2}$, las coordenadas del máximo son $\left(-1,-\dfrac{5}{2}\right)$.

- $f''(1)=\dfrac{4}{1^3}=4>0 \Rightarrow x=1$ es un mínimo relativo.

  Como $f(1)=\dfrac{4\cdot 1^2+3\cdot 1+4}{2\cdot 1}=\dfrac{4+3+4}{2}=\dfrac{11}{2}$, las coordenadas del mínimo son $\left(1,\ \dfrac{11}{2}\right)$.

PROPUESTA A. EJERCICIO 2

Enunciado:

Calcula las siguientes integrales:

a) $\displaystyle\int(\cos(2x)+\operatorname{sen}x\cos x)\,dx$.

b) $\displaystyle\int\frac{x^3-1}{x+2}\,dx$.

Solución:

a) $\displaystyle\int(\cos(2x)+\operatorname{sen}x\cos x)\,dx=\int\cos(2x)\,dx+\int\operatorname{sen}x\cos x\,dx=\frac{1}{2}\int 2\cos(2x)\,dx+\frac{1}{2}\int 2\operatorname{sen}x\cos x\,dx=$

$\displaystyle=\frac{1}{2}\operatorname{sen}(2x)+\frac{1}{2}\operatorname{sen}^2 x+C$.

b) Realizando la división $(x^3-1):(x+2)$ se obtiene de cociente x^2-2x+4 y de resto -9. Entonces:

$$x^3-1=(x+2)(x^2-2x+4)-9\Rightarrow\frac{x^3-1}{x+2}=\frac{(x+2)(x^2-2x+4)-9}{x+2}=x^2-2x+4-\frac{9}{x+2}.$$ Por tanto:

$$\int\frac{x^3-1}{x+2}\,dx=\int\left(x^2-2x+4-\frac{9}{x+2}\right)dx=\int(x^2-2x+4)\,dx-\int\frac{9}{x+2}\,dx=\frac{x^3}{3}-x^2+4x-9\ln|x+2|+C.$$

PROPUESTA A. EJERCICIO 3

Enunciado:

Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}4 & 5\\ -3 & -4\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, se pide:

a) Resuelve el sistema matricial $\begin{cases}2X+3Y=A\\ X+Y=B\end{cases}$.

b) Encuentra una fórmula general para B^n, donde $n\in\mathbb{N}$. (Indicación: Calcula las primeras potencias de la matriz B).

Solución:

a) Si en el sistema $\begin{cases}2X+3Y=A\\ X+Y=B\end{cases}$ multiplicamos la segunda ecuación por -2, se tiene $\begin{cases}2X+3Y=A\\ -2X-2Y=-2B\end{cases}$.

Sumando ambas ecuaciones se obtiene que:

$$Y=A-2B=\begin{pmatrix}4 & 5\\ -3 & -4\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 5\\ -3 & -4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0 & 2\\ 2 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow Y=\begin{pmatrix}4 & 3\\ -5 & -4\end{pmatrix}.$$

De la segunda ecuación del sistema $X+Y=B$ se deduce que $X=B-Y$. Sustituyendo tenemos:

$$X=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}4&3\\-5&-4\end{pmatrix}\Rightarrow X=\begin{pmatrix}-4&-2\\6&4\end{pmatrix}.$$

b) $B^2=B\cdot B=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=I$

$B^3=B^2\cdot B=I\cdot B=B$

$B^4=B^3\cdot B=B\cdot B=I$

$B^5=B^4\cdot B=I\cdot B=B$

Así podríamos seguir. Obsérvese que cuando el exponente es par el resultado es la matriz identidad I. Sin embargo, si el exponente es impar el resultado es la matriz B. La fórmula general sería pues:

$$B^n=\begin{cases}I & \text{si } \ n \text{ es par}\\ B & \text{si } \ n \text{ es impar}\end{cases},\ n\in\mathbb{N}$$

Propuesta A. Ejercicio 4

Enunciado:

Consideremos el plano $\pi\equiv x-z=0$ y la recta $r\equiv\begin{cases}x=1+at\\ y=1-at\\ z=\quad 2t\end{cases},\ t\in\mathbb{R}$.

a) Determina el parámetro $a\in\mathbb{R}$ para que la recta r y el plano π sean paralelos.

b) Para el valor de a determinado, obtén las ecuaciones de una recta r' paralela al plano π y que corte perpendicularmente a r en el punto $P(1,1,0)$.

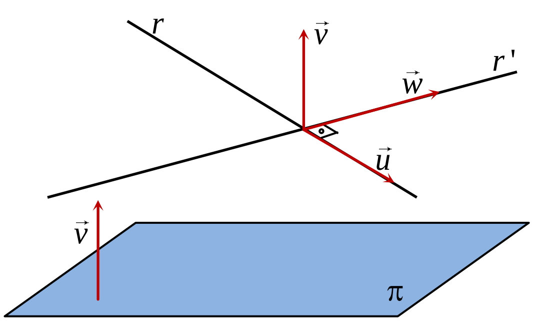
Solución:

a) La recta r está dada en ecuaciones paramétricas. Un vector director suyo es $\vec{u}=(a,-a,2)$. Un vector perpendicular al plano π es $\vec{v}=(1,0,-1)$. Como r y π han de ser paralelos, $\vec{u}$ y $\vec{v}$ serán perpendiculares, con lo que su producto escalar ha de ser cero: $\vec{u}\cdot\vec{v}=0\Leftrightarrow(a,-a,2)\cdot(1,0,-1)=0\Leftrightarrow a-2=0\Leftrightarrow a=2$.

b) Efectivamente $P(1,1,0)\in r$. Basta observar las ecuaciones paramétricas de r para darse cuenta de ello. El producto vectorial de $\vec{u}$ y $\vec{v}$ es un vector que tiene dirección perpendicular a ambos. En particular, tendrá dirección paralela al plano (pues $\vec{v}$ es perpendicular a π) y perpendicular a r. Es un vector director de la recta r' que se pide. Llamando $\vec{w}=\vec{u}\times\vec{v}=(i,j,k)$ al producto vectorial de $\vec{u}$ y $\vec{v}$, se tiene:

$$\vec{w}=\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}i&j&k\\2&-2&2\\1&0&-1\end{vmatrix}=(2i+2j)-(-2k-2j)=$$

$$=2i+4j+2k\Rightarrow\vec{w}=(2,4,2).$$



Así pues, la ecuación de la recta r' será: $r'\equiv\begin{cases}x=1+2t\\ y=1+4t\\ z=\quad 2t\end{cases},\ t\in\mathbb{R}$

.