

PAU - Matemáticas II - Junio 2014 - Propuesta A

Ejercicio 1

a) Calcula los valores de los parámetros $a, b \in \mathbb{R}$ para que la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + a & \text{si } x \leq 0 \\ x^2 + be^x + 3 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

sea continua y derivable en $x = 0$. [1,5 puntos]

b) Para los valores de a y b encontrados, calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 0$. [1 punto]

Solución

a) Estudiemos la continuidad de f en $x = 0$.

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x^2 - 2x + a) = a \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 + be^x + 3) = b + 3 \end{cases}$$

Por tanto, como también $f(0) = a$, para que f sea continua en $x = 0$ se ha de cumplir, por un lado, que $a = b + 3$.

Estudiemos ahora la derivabilidad de f en $x = 0$. Salvo en este punto la función derivada es

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 2 & \text{si } x < 0 \\ 2x + be^x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

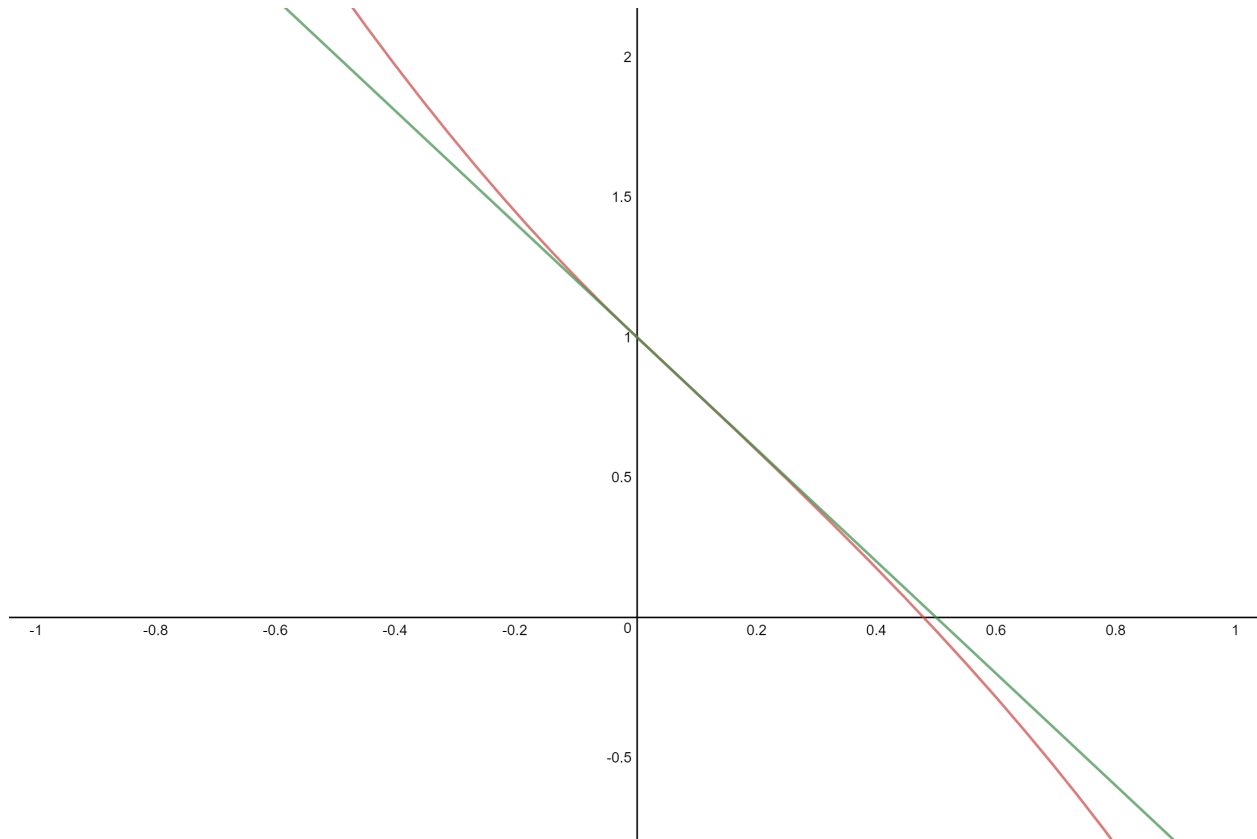
Por tanto las derivadas laterales en $x = 0$ son:
$$\begin{cases} f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (2x - 2) = -2 \\ f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (2x + be^x) = b \end{cases}$$

De aquí se deduce, por otro lado, que $b = -2$ y sustituyendo en $a = b + 3$ deducimos también que $a = 1$.

b) La imagen en $x = 0$ es $f(0) = a = 1$ y la derivada en $x = 0$ es $f'(0) = b = -2$. Por tanto, la recta tangente en el punto de abscisa $x = 0$ es

$$y - f(0) = f'(0)(x - 0) \Rightarrow y - 1 = -2x \Rightarrow y = -2x + 1$$

En la siguiente figura se puede apreciar la gráfica de la función (en rojo) y la recta tangente en $x = 0$ (en verde).



Obsérvese como en las cercanías de $x = 0$ la recta tangente se confunde con la gráfica de la función.

Ejercicio 2

Calcula la integral definida

$$\int_0^1 (x^2 + x + 1)e^{-x} dx \quad [2,5 \text{ puntos}]$$

Solución

Realicemos primero, usando el método de integración por partes, la integral indefinida.

$$\int (x^2 + x + 1)e^{-x} dx = \left[\begin{array}{l} u = x^2 + x + 1 \quad dv = e^{-x} \\ du = (2x + 1)dx \quad v = -e^{-x} \end{array} \right] = -(x^2 + x + 1)e^{-x} - \int (2x + 1)e^{-x} dx = (*)$$

Volviendo a aplicar el método de integración por partes en la última integral

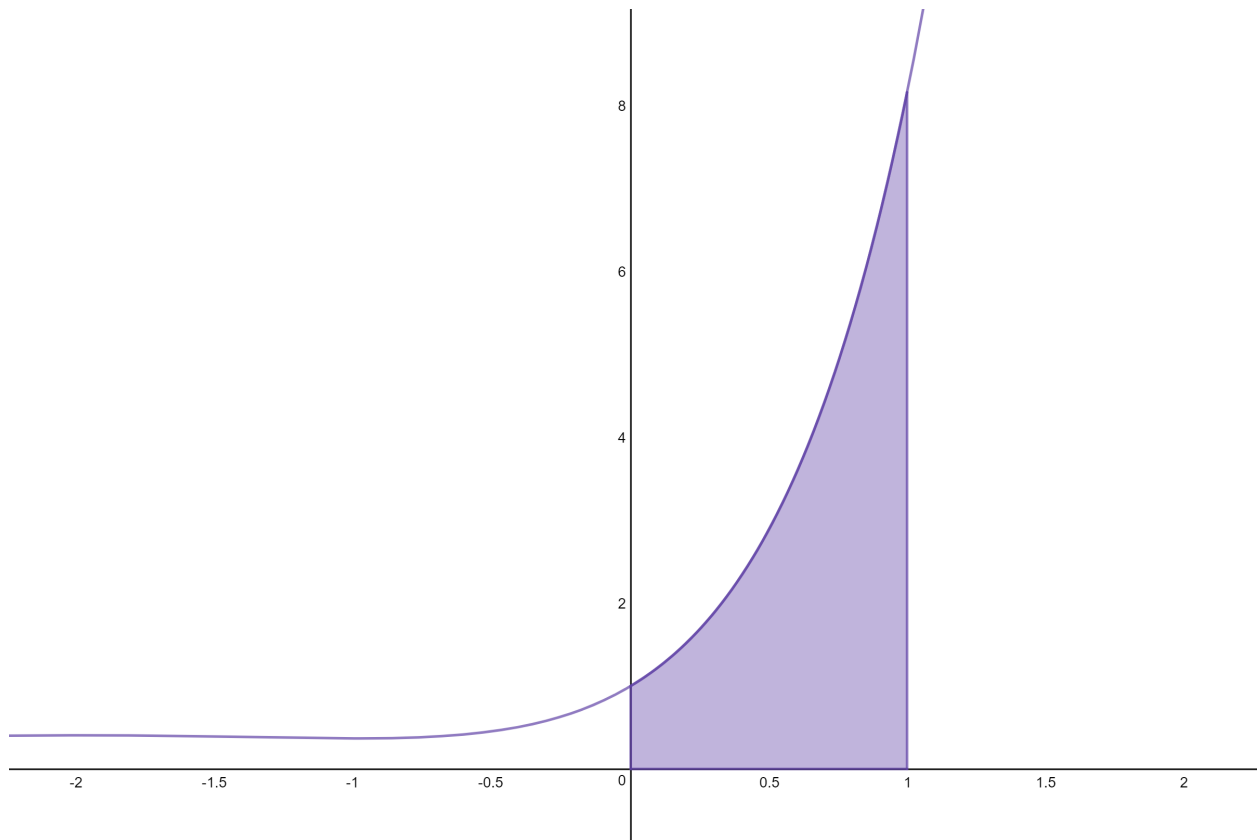
$$(*) = \left[\begin{array}{l} u = 2x + 1 \quad dv = e^{-x} \\ du = 2dx \quad v = -e^{-x} \end{array} \right] = -(2x + 1)e^{-x} - \int 2e^{-x} dx =$$

$$= x^2e^x + xe^x + e^x - 2xe^x - e^x + 2e^x + C = x^2e^x - xe^x + 2e^x + C = (x^2 - x + 2)e^x + C$$

Usemos ahora la regla de Barrow para resolver la integral definida.

$$\int_0^1 (x^2 + x + 1)e^{-x} dx = (x^2 - x + 2)e^x \Big|_0^1 = 2e - 2$$

La integral definida que se ha calculado representa el área del recinto representado en la figura siguiente.



Ejercicio 3

- a) Sabiendo que A es una matriz cuadrada de orden 2 tal que $|A| = 5$, calcula razonadamente el valor de los determinantes

$$|-A| \quad ; \quad |A^{-1}| \quad ; \quad |A^T| \quad ; \quad |A^3| \quad \text{[1 punto]}$$

- b) Sabiendo que

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

calcula, usando las propiedades de los determinantes,

$$\begin{vmatrix} 3-a & -b & 1-c \\ 1+a & 1+b & 1+c \\ 3a & 3b & 3c \end{vmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{vmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2a & 2b & 2c \\ 0 & 30 & 0 & 10 \\ 1 & 4 & 4 & 4 \end{vmatrix} \quad \text{[1,5 puntos]}$$

Solución

a) $|-A| = |-1 \cdot A| = |-1| \cdot |A| = 1 \cdot 5 = 5.$

Como $A \cdot A^{-1} = I$ donde I es la matriz identidad, se tiene que $|A \cdot A^{-1}| = |I| = 1$. Ahora, puesto que el determinante del producto es el producto de los determinantes: $|A| \cdot |A^{-1}| = 1$ y de aquí $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|} = \frac{1}{5}.$

El determinante de una matriz cuadrada es igual que el determinante de su traspuesta: $|A| = |A^T| = 5.$

$$|A^3| = |A \cdot A \cdot A| = |A| \cdot |A| \cdot |A| = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125.$$

b) Primer determinante.

$$\begin{vmatrix} 3-a & -b & 1-c \\ 1+a & 1+b & 1+c \\ 3a & 3b & 3c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1+a & 1+b & 1+c \\ 3a & 3b & 3c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -a & -b & -c \\ 1+a & 1+b & 1+c \\ 3a & 3b & 3c \end{vmatrix} = (*)$$

Se ha descompuesto el determinante en dos usando los sumandos de la primera fila. El segundo de los determinantes de la suma es cero porque tiene dos filas proporcionales (la primera y la tercera). A continuación vamos a descomponer el primer determinante de la suma en otros dos usando los sumandos de la segunda fila.

$$(*) = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3a & 3b & 3c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ a & b & c \\ 3a & 3b & 3c \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \end{vmatrix} = -3 \cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -3 \cdot 2 = -6$$

El segundo de los sumandos vuelve a ser nulo por ser la tercera fila proporcional a la segunda. Luego hemos sacado 3 factor común del primer determinante y hemos cambiado el signo por intercambiar las filas primera y tercera.

Segundo determinante.

Desarrollando por los elementos de la primera fila, extrayendo factores de las filas correspondientes e intercambiando las dos últimas filas, tenemos:

$$\begin{vmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2a & 2b & 2c \\ 0 & 30 & 0 & 10 \\ 1 & 4 & 4 & 4 \end{vmatrix} = 5 \cdot \begin{vmatrix} 2a & 2b & 2c \\ 30 & 0 & 10 \\ 4 & 4 & 4 \end{vmatrix} = 5 \cdot 2 \cdot 10 \cdot 4 \cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= -400 \cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -400 \cdot 2 = -800.$$

Ejercicio 4

a) Hallar $a \in \mathbb{R}$ para que las rectas

$$r \equiv \begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ -x + y - 3z = 2 \end{cases} \quad \text{y} \quad s \equiv \begin{cases} x + y = 0 \\ 3x + 2y + z = a \end{cases}$$

se corten en un punto. [1,25 puntos]

b) Para dicho valor de a , da la ecuación implícita de un plano π que contenga a r y a s . [1,25 puntos]

Solución

a) Si las rectas se cortan en un punto, el sistema de ecuaciones formado por ambas ha de ser compatible y determinado. Por tanto, el determinante de la matriz ampliada debe ser igual a cero.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -4 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -4 & 4 & a-3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -4 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \\ -4 & 4 & a-3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -4 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & a-3 \end{vmatrix} =$$

$$= -1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & a-3 \end{vmatrix} = -1 \cdot (a-3 - (-4)) = -a-1.$$

En el primer paso se han hecho ceros todos los términos de la primera columna salvo el primero. Para ello se ha sumado la segunda fila a la primera, a la tercera fila se le ha restado

la primera y a la cuarta fila se le ha restado la primera previamente multiplicada por tres. A continuación, en el segundo paso se ha desarrollado el determinante por los elementos de la primera columna. En el tercer paso se ha sumado a la primera columna la segunda. Finalmente se ha vuelto a desarrollar por los elementos de la primera columna.

Por tanto:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & a \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -a - 1 = 0 \Leftrightarrow a = -1$$

Podemos hallar también el punto de corte. Si en la ecuación $x + y = 0$ de la recta s despejamos y tenemos que $y = -x$. Sustituyendo en las ecuaciones de la recta r :

$$r \equiv \begin{cases} y - z = 1 \\ 2y - 3z = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2y - 2z = 2 \\ 2y - 3z = 2 \end{cases} \Rightarrow z = 0 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow x = -1$$

De este modo obtenemos que el punto de corte de las rectas r y s es $(-1, 1, 0)$.

b) Hallemos un vector director \vec{u} de r .

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & -3 \end{vmatrix} = (-6i + j + k) - (-2k - 3j - i) = -5i + 4j + 3k \Rightarrow \vec{u} = (-5, 4, 3)$$

De igual modo, hallemos también un vector director \vec{v} de s .

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (i + 2k) - (3k + j) = i - j - k \Rightarrow \vec{v} = (1, -1, -1)$$

Calculemos finalmente la ecuación del plano π que contiene a las rectas r y s . Esto es sencillo pues disponemos de un punto y dos vectores directores.

$$\begin{vmatrix} x+1 & y-1 & z \\ -5 & 4 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (-4(x+1) + 3(y-1) + 5z) - (4z + 5(y-1) - 3(x+1)) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -4x - 4 + 3y - 3 + 5z - 4z - 5y + 5 + 3x + 3 = 0 \Rightarrow \pi \equiv -x - 2y + z + 1 = 0$$