1. Sistemas de m ecuaciones lineales con n incógnitas

Un *sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas* es un conjunto de *m* igualdades del tipo:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots\ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots\ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots\ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad (1)$$

Los números $a_{11}, a_{12}, \ldots\ldots, a_{mn}$ son, generalmente, conocidos y se llaman *coeficientes*.

Los números $b_1, b_2, \ldots\ldots, b_m$ son también conocidos y se llaman *términos independientes*.

Los números $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n$ son desconocidos y se llaman *incógnitas*.

Mientras no digamos otra cosa supondremos que todos los números anteriores son reales. Obsérvese además que todas la ecuaciones lineales son de primer grado.

Por ejemplo, $\begin{cases} 9x_1 + 4x_2 - 2x_3 + x_4 = 5 \\ x_1 + x_3 - 8x_4 = 0 \\ 6x_2 - x_3 = -2 \end{cases}$, es un sistema de 3 ecuaciones lineales con 4 incógnitas.

En el resto del tema cuando hablemos de sistemas nos referiremos a sistemas de *m* ecuaciones lineales con *n* incógnitas.

2. Clasificación de los sistemas lineales

Dado un sistema de ecuaciones lineales, se llama *solución* de dicho sistema a un conjunto de *n* números: $\alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots, \alpha_n$ tales que al sustituir en las igualdades x_1 por α_1, x_2 por α_2, …, x_n por α_n, dichas igualdades se cumplen efectivamente.

Puede ocurrir que un sistema tenga única solución, que no tenga ninguna o que tenga infinitas.

Por ejemplo:

- ✓ El sistema $\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 7 \\ 2x_1 + 5x_2 = -4 \end{cases}$ tiene una única solución, que es $x_1 = 3$, $x_2 = -2$ (compruébalo).
- ✓ El sistema $\begin{cases} x_1 - 3x_2 = 5 \\ -2x_1 + 6x_2 = 6 \end{cases}$ no tiene ninguna solución (intenta resolverlo y verás como llegas a un absurdo o contradicción).
- ✓ El sistema $\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 = 5 \\ 8x_1 - 6x_2 = 10 \end{cases}$ tiene infinitas soluciones, tales como $[x_1 = 2,\ x_2 = 1]$, $[x_1 = 5,\ x_2 = 5]$, $[x_1 = -1,\ x_2 = -3]$, etcétera. Todas las soluciones de este sistema pueden obtenerse dando a λ todos los valores reales posibles en la expresión $[x_1 = 2 + 3\lambda,\ x_2 = 1 + 4\lambda]$ la cual se llama *solución general* del sistema.

Según el número de sus soluciones los sistemas se clasifican en *compatibles* (si tienen alguna solución) e *incompatibles* (si no tienen ninguna solución). A su vez los sistemas compatibles se clasifican en *determinados* (si tienen solución única) e *indeterminados* (si tienen infinitas soluciones).

Por otro lado, dos sistemas de ecuaciones lineales se dicen *equivalentes* cuando tienen las mismas soluciones.

3. Matriz de los coeficientes y matriz ampliada

Dado un sistema de *m* ecuaciones con *n* incógnitas como el de expresión (1) llamaremos *matriz de los coeficientes* A y *matriz ampliada* A', respectivamente, a las matrices siguientes:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots\ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots\ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots\ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad A' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots\ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots\ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots\ldots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

4. Regla de Cramer

Dado un sistema de n ecuaciones lineales con n incógnitas $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ...+ a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ...+ a_{2n}x_n = b_2 \\ \text{...} \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ...+ a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$, si el determinante de la matriz de los coeficientes, $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ..... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ..... & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & ..... & a_{nn} \end{vmatrix}$, es distinto de cero, el sistema es compatible determinado, y su solución es:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & ..... & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & ..... & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_n & a_{n2} & ..... & a_{nn} \end{vmatrix}}{|A|} \ ; \ x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & ..... & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & ..... & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & b_n & ..... & a_{nn} \end{vmatrix}}{|A|} \ ; \ ..... \ ; \ x_n = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ..... & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & ..... & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & ..... & b_n \end{vmatrix}}{|A|}$$

Por ejemplo, el sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas $\begin{cases} x - 2y + 3z = 1 \\ 3x + y - 7z = 0 \\ 5x - 4y + z = 2 \end{cases}$, es compatible determinado porque $|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & -7 \\ 5 & -4 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$. Su solución es:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -7 \\ 2 & -4 & 1 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{-5}{-2} = \frac{5}{2} \ ; \ y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & -7 \\ 5 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{-6}{-2} = 3 \ ; \ z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 5 & -4 & 2 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{-3}{-2} = \frac{3}{2}$$

Observa que la regla de Cramer permite el cálculo de cualquier incógnita sin necesidad de calcular previamente las demás.

5. Teorema de Rouché-Frobenius

Sea $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ...+ a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ...+ a_{2n}x_n = b_2 \\ \text{...} \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ...+ a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$ un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas y sean también $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ..... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ..... & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & ..... & a_{mn} \end{pmatrix}$ y $A' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ..... & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & ..... & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & ..... & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$ la matriz de los coeficientes y la matriz ampliada, respectivamente, asociadas al sistema. Llamemos r al rango de la matriz A. Entonces:

1) Si rango de $A \neq$ rango de A', el sistema es incompatible.
2) Si rango de $A =$ rango de A', el sistema es compatible. Además
   a) Si rango de $A =$ rango de A' y $r = n$, el sistema es compatible determinado (solución única).
   b) Si rango de $A =$ rango de A' y $r < n$, el sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones). En este caso se pueden expresar r incógnitas en función de las $n - r$ restantes. Al número $n - r$ se le llama *grado de libertad* del sistema.

5.1. Algunos ejemplos sencillos de aplicación del Teorema de Rouché-Frobenius

- ✓ Dado el sistema $\begin{cases} 2x+3y=5 \\ x-y=2 \\ 3x+y=6 \end{cases}$, la matriz de los coeficientes es $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada es $A'=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 6 \end{pmatrix}$. Es fácil ver que $r(A)=2$ ($r(A)$ es, simbólicamente, rango de *A*) pues hay un menor de orden 2 de *A* distinto de cero: $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}=-2-3=-5\neq 0$. Además $r(A')=3$ pues $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 6 \end{vmatrix}=4\neq 0$. Entonces $r(A)\neq r(A')$ y, por el teorema de Rouché-Frobenius, el sistema es incompatible.

- ✓ En el sistema $\begin{cases} 3x+2y+5z-t=2 \\ 2x-y-z+t=3 \\ x+y+3z-2t=4 \end{cases}$ tenemos que $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$ y $A'=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & -2 & 4 \end{pmatrix}$. Como $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}=-5$, $r=r(A)=r(A')=3<4=n$, del teorema de Rouché-Frobenius se deduce que el sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones). Como su grado de libertad es $n-r=4-3=1$, entonces tres de las incógnitas se expresarán en función de una restante. Como el menor distinto de cero que hemos escogido para calcular el rango está formado por las tres primeras columnas, tomaremos como incógnita libre la última, que pasaremos al segundo miembro, y aplicaremos la regla de Cramer. Es decir si llamamos $t=\lambda$, el sistema se puede escribir así: $\begin{cases} 3x+2y+5z=2+\lambda \\ 2x-y-z=3-\lambda \\ x+y+3z=4+2\lambda \end{cases}$, cuyas soluciones son:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 2+\lambda & 2 & 5 \\ 3-\lambda & -1 & -1 \\ 4+2\lambda & 1 & 3 \end{vmatrix}}{-5}=\frac{5+5\lambda}{-5}=-1-\lambda\ ;\quad y=\frac{\begin{vmatrix} 3 & 2+\lambda & 5 \\ 2 & 3-\lambda & -1 \\ 1 & 4+2\lambda & 3 \end{vmatrix}}{-5}=\frac{50+15\lambda}{-5}=-10-3\lambda\ ;$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2+\lambda \\ 2 & -1 & 3-\lambda \\ 1 & 1 & 4+2\lambda \end{vmatrix}}{-5}=\frac{-25-10\lambda}{-5}=5+2\lambda$$

- ✓ Por último, en el sistema $\begin{cases} 2x+y-z=4 \\ x-y+2z=1 \\ x+2y+z=0 \\ x+2y+5z=-3 \end{cases}$, tenemos que $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ y $A'=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 5 & -3 \end{pmatrix}$. En este caso $r(A)=3$ pues $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}=-12\neq 0$ y $r(A')=3$ ya que $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 5 & -3 \end{vmatrix}=0$ (compruébalo). Así, $r(A)=r(A')=3=n$, con lo que el sistema es compatible determinado (solución única). Para resolverlo podemos eliminar la última ecuación pues, por ser $r(A')=3$, dependerá linealmente de las demás. Utilizando la regla de Cramer las soluciones son: $x=23/12$, $y=-7/12$, $z=-3/4$ (compruébalo también).

6. Sistemas lineales homogéneos

Decimos que un sistema de ecuaciones lineales es *homogéneo* cuando todos los términos independientes son nulos. Un sistema homogéneo siempre tiene al menos una solución, $x_1 = x_2 = x_3 = ... = x_n = 0$, que llamaremos *solución trivial*.

Un teorema importante sobre sistemas lineales homogéneos es el siguiente:

Consideremos un sistema homogéneo de *m* ecuaciones con *n* incógnitas, y sea *r* el rango de la matriz de los coeficientes. Entonces:

- ✓ Si $r = n$ el sistema es compatible determinado y, consecuentemente, la única solución es la trivial.
- ✓ Si $r < n$ el sistema es compatible indeterminado y tiene infinitas soluciones, además de la trivial.

Por ejemplo, el sistema homogéneo $\begin{cases} x+y+z+t=0 \\ 2x-3y+2z-8t=0 \\ 2x+7y+2z+12t=0 \end{cases}$ tiene infinitas soluciones distintas de la trivial pues el rango *r* de la matriz de los coeficientes cumplirá $r \leq 3$ y como $n = 4$, nos encontramos en el segundo de los casos anteriores ($r < n$).

Sin embargo, en el sistema homogéneo $\begin{cases} x+2y+4z=0 \\ 2x+y-z=0 \\ x+y+z=0 \\ 5x-3y+z=0 \end{cases}$, el rango de la matriz de los coeficientes $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 5 & -3 & 1 \end{pmatrix}$ vale 3 pues hay un menor de orden 3 distinto de cero: $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 5 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 20 \neq 0$, y como $n = 3$, se tiene que $r = n$, con lo que el sistema sólo tiene la solución trivial.

Un caso particular del teorema anterior se da cuando el sistema homogéneo tiene el mismo número de ecuaciones que de incógnitas:

Un sistema homogéneo de *n* ecuaciones con *n* incógnitas tiene soluciones no triviales si y sólo si el determinante de la matriz de los coeficientes es nulo.

Por ejemplo, el sistema $\begin{cases} x+y+z=0 \\ x-y+2z=0 \\ 2x+y-z=0 \end{cases}$ tiene únicamente la solución trivial ya que $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 7 \neq 0$.

Un caso todavía más particular es el de los sistemas homogéneos de tres ecuaciones con tres incógnitas: $\begin{cases} a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z=0 \\ a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z=0 \\ a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z=0 \end{cases}$. Supongamos que $r(A) = 2$, es decir, que el determinante de la matriz de los coeficientes es nulo y que, ordenadas convenientemente las ecuaciones si fuera necesario, $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$. Entonces es fácil demostrar que la solución general del sistema viene dada por la proporcionalidad siguiente:

$$\frac{x}{\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}} = \frac{y}{-\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}} = \frac{z}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

Para verlo vamos a resolver el sistema $\begin{cases} 2x-y+4z=0 \\ x+5y-z=0 \\ 7x+13y+5z=0 \end{cases}$. Se tiene que $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 5 & -1 \\ 7 & 13 & 5 \end{vmatrix} = 0$ y que $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} \neq 0$.

Entonces $\frac{x}{\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 5 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{y}{-\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{z}{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}} \Rightarrow \frac{x}{-19} = \frac{y}{6} = \frac{z}{11}$. Igualando a λ: $x = -19\lambda$, $y = 6\lambda$, $z = 11\lambda$.

7. Discusión de sistemas de ecuaciones lineales

Es corriente que, dado un sistema de ecuaciones lineales, alguno o algunos de los coeficientes o de los términos independientes sean desconocidos y dependan de uno o más parámetros. Discutir un sistema de ecuaciones dependiente de uno o más parámetros es identificar para qué valores de los parámetros el sistema es compatible, distinguiendo los casos en que es determinado o indeterminado.
Es posible discutir sistemas de ecuaciones lineales utilizando el método de Gauss. Veamos cómo hacerlo con la ayuda de los determinantes. Lo mejor es hacer un ejemplo.

Clasificar, en función del parámetro $m \in \mathbb{R}$, el sistema de ecuaciones $\begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2x - 3y = -1 \\ x + 2y + mz = m + 3 \end{cases}$. Resuélvelo, si es posible, para $m = 7$. *(PAEG UCLM Septiembre 2001. Propuesta B. Ejercicio número 3)*

La matriz de los coeficientes es $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & m \end{pmatrix}$, cuyo determinante es $|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & m \end{vmatrix} = -m + 7$. Como el menor $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$, el rango de A es al menos 2. Además, si $|A| \neq 0$, es decir si $m \neq 7$, tenemos que $r(A) = r(A') = 3 = n$ (número de incógnitas), y el sistema será compatible determinado (solución única). Sin embargo, si $|A| = 0$, es decir si $m = 7$, se tiene que $r(A) = 2$. En este caso la matriz ampliada es $A' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 7 & 10 \end{pmatrix}$, cuyo rango también es 2 ya que todos los menores de orden 3 son nulos (compruébalo).

Resumiendo, si $m = 7$, $r(A) = r(A') = 2 < 3 = n$, con lo que el sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones). El grado de libertad del sistema es 1. Por tanto dos de las incógnitas dependen de una tercera. Podemos eliminar la tercera fila y, como hemos escogido el menor de orden dos distinto de cero procedente de las dos primeras columnas, llamaremos $z = \lambda$ y la pasaremos al segundo miembro, con lo que el sistema queda de la forma:

$$\begin{cases} x - y = 1 - \lambda \\ 2x - 3y = -1 \end{cases}$$

Por la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ -1 & -3 \end{vmatrix}}{-1} = \frac{(-3+3\lambda)-1}{-1} = \frac{-4+3\lambda}{-1} = 4 - 3\lambda$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1-\lambda \\ 2 & -1 \end{vmatrix}}{-1} = \frac{-1-(2-2\lambda)}{-1} = \frac{-3+2\lambda}{-1} = 3 - 2\lambda$$

Dos observaciones de importancia: tipos de parámetros

- ✓ Para cada valor del parámetro *m* distinto de 7, no es que haya infinitas soluciones, sino que cada uno de ellos da lugar a un sistema distinto. Es decir, para cada *m* distinto de 7, hay infinitos sistemas, cada uno de ellos con solución única.
- ✓ En el caso $m = 7$, observa que las soluciones dependen de un parámetro: λ. Esto quiere decir que solamente hay un sistema y que este sistema tiene infinitas soluciones, una para cada valor que le queramos dar a λ. En el caso de los sistemas compatibles indeterminados esto siempre es así: las soluciones dependen de un parámetro si el grado de libertad es 1, de dos parámetros si el grado de libertad es 2, etcétera. Tan importante es saber extraer las infinitas soluciones de un sistema compatible indeterminado y expresarlas en función de parámetros como, dadas las soluciones de un sistema compatible indeterminado, saber escribir el sistema del que proceden. Esto se conoce con el nombre de *eliminación de parámetros*, cuestión que abordaremos a continuación como último punto de este tema.

8. Elimación de parámetros

Ya hemos comentado que cuando un sistema de ecuaciones lineales es indeterminado, su solución general viene expresada en función de una o varias letras llamadas *parámetros*. Cuando dichos parámetros van tomando valores reales, se van obteniendo la soluciones del sistema.

Recíprocamente, si tenemos la solución general del sistema, el proceso consistente en obtener el sistema cuya solución es la dada se llama *eliminación de parámetros*.

Para realizar la eliminación de parámetros, se aplica a la solución general dada el método de Gauss, considerando los parámetros como incógnitas. Las ecuaciones que quedan al final, en las cuales no figuran los parámetros, son las ecuaciones buscadas.

Veamos un par de ejemplos:

- ✓ Eliminar los parámetros λ y μ en el sistema $\begin{cases} x = 2-3\lambda+\mu \\ y = 1+\lambda-\mu \\ z = 2-\lambda-2\mu \\ t = 4\lambda+\mu \end{cases}$

Escribamos el sistema así: $\begin{cases} -3\lambda+\mu = x-2 \\ \lambda-\mu = y-1 \\ -\lambda-2\mu = z-2 \\ 4\lambda+\mu = t \end{cases}$

Aplicando el método de Gauss considerando como incógnitas λ y μ tenemos:

$$\begin{matrix} \\ 3f_2+f_1 \\ -3f_3+f_1 \\ 3f_4+4f_1 \end{matrix} \begin{cases} -3\lambda+\mu = x-2 \\ \quad -2\mu = x+3y-5 \\ \quad 7\mu = x-3z+4 \\ \quad 7\mu = 4x+3t-8 \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} \\ \\ 2f_3+7f_2 \\ 2f_4+7f_2 \end{matrix} \begin{cases} -3\lambda+\mu = x-2 \\ \quad -2\mu = x+3y-5 \\ \quad 0 = 9x+21y-6z-27 \\ \quad 0 = 15x+21y+6t-51 \end{cases}$$

Las dos últimas ecuaciones, en las que no figuran λ y μ, son las del sistema buscado. Simplificando la primera por 3 queda finalmente: $\begin{cases} 3x+7y-2z = 9 \\ 15x+21y+6t = 51 \end{cases}$

Cualquier otro sistema equivalente a éste también es solución del problema.

- ✓ Eliminar el parámetro λ en el sistema $\begin{cases} x = 4+2\lambda \\ y = 5-3\lambda \\ z = 1+5\lambda \end{cases}$

Escribamos el sistema así: $\begin{cases} 2\lambda = x-4 \\ -3\lambda = y-5 \\ 5\lambda = z+1 \end{cases}$

Aplicando el método de Gauss considerando como incógnita λ:

$$\begin{matrix} \\ 2f_2+3f_1 \\ 2f_3-5f_1 \end{matrix} \begin{cases} 2\lambda = x-4 \\ \quad 0 = 3x+2y-22 \\ \quad 0 = -5x+2z+22 \end{cases}$$

Por lo tanto la solución es $\begin{cases} 3x+2y = 22 \\ -5x+2z = -22 \end{cases}$, o cualquier otro sistema equivalente.