

1. Ecuación lineal

Es una ecuación polinómica de grado uno con una o varias incógnitas.

Por ejemplo, son ecuaciones lineales: $2x - 3y + 4z = 8$, $2(3x - 6y + z) - 5 = 7y + z - 1$. Sin embargo, no son ecuaciones lineales: $x^2 - y + 3z = 1$, $2x - xy + 3xyz = 6$

O sea, que para que una ecuación sea lineal, en cada término ha de haber a lo sumo una incógnita como mucho elevada a uno. Se llaman ecuaciones lineales porque una ecuación lineal con dos incógnitas geoméricamente representa una recta (línea), y una ecuación lineal con tres incógnitas representa un plano.

2. Ecuaciones equivalentes

Dos ecuaciones son equivalentes cuando tienen la misma solución (o las mismas soluciones). Si se les suma o se les resta a los dos miembros de una ecuación un mismo número se obtiene una ecuación equivalente a la primera. Si se multiplican o dividen los dos miembros de una ecuación por un mismo número distinto de cero, también se obtiene una ecuación equivalente a la primera.

Por ejemplo: $\frac{-3(2x - y)}{3} - \frac{y - z}{4} = \frac{1}{2} + x$ es equivalente a $-12(2x - y) - (y - z) = 6 + 12x$ (se han multiplicado todos los términos por 12), que es equivalente a $-24x + 12y - y + z = 6 + 12x$, que también es equivalente a

$-36x + 11y + z = 6$. El razonamiento anterior, en lenguaje simbólico, se escribe así: $\frac{-3(2x - y)}{3} - \frac{y - z}{4} = \frac{1}{2} + x$

$\Leftrightarrow -12(2x - y) - (y - z) = 6 + 12x \Leftrightarrow -24x + 12y - y + z = 6 + 12x \Leftrightarrow -36x + 11y + z = 6$

3. Sistemas de ecuaciones lineales

Es un conjunto de ecuaciones lineales que se dan con el objetivo de determinar la solución o soluciones comunes a todas ellas.

Un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas representa un conjunto de rectas. Se trata de saber si se cortan o no en algún punto (que sería la solución del sistema). Si, en cambio, las ecuaciones tienen tres incógnitas, se trataría de un conjunto de planos y habría que determinar si tiene un punto en común, o una recta común (haz de planos) o no tienen ningún punto en común. Es posible también que en un sistema algunas ecuaciones tengan dos incógnitas y otras tres. En este caso se trataría de un sistema conjunto de rectas y planos.

4. Sistemas de ecuaciones equivalentes

Son aquellos que tienen las mismas soluciones. Es posible que dos sistemas sean equivalentes sin que lo sean las ecuaciones que los forman. Por ejemplo: $\begin{cases} 2x - 3y = -7 \\ -x + y = -1 \end{cases}$ y $\begin{cases} 4x + 5y = -3 \\ -3x - 2y = 4 \end{cases}$ tienen ambos por solución $x = -2$, $y = 1$ (son equivalentes), pero observa que las ecuaciones que los forman no son para nada equivalentes las de uno con las del otro.

5. Transformaciones para obtener sistemas equivalentes

Un sistema se puede transformar en otro que sea equivalente, es decir, que tenga la mismas soluciones. Estas transformaciones pretenden reducir el primer sistema a otro más sencillo y a su vez a otro más simple, con el objetivo de obtener las soluciones del último de manera fácil. Estas soluciones también lo serán del primero, pues todos ellos eran equivalentes. Las transformaciones para obtener sistemas equivalentes son:

- 1) Multiplicar o dividir los dos miembros de una de las ecuaciones por un número distinto de cero.
- 2) Añadir una ecuación que sea combinación lineal de las otras o, al contrario, suprimir una ecuación que sea combinación lineal de las otras.
- 3) Sustituir una ecuación por el resultado de sumarle otra multiplicada previamente por un número.

Veamos un ejemplo: $\begin{cases} 2x - 5y = -1 \\ -3x + y = -5 \\ 5x - 6y = 4 \end{cases} \xrightarrow{(1)} \begin{cases} 2x - 5y = -1 \\ -3x + y = -5 \end{cases} \xrightarrow{(2)} \begin{cases} 6x - 15y = -3 \\ -6x + 2y = -10 \end{cases} \xrightarrow{(3)} \begin{cases} 6x - 15y = -3 \\ -13y = -13 \end{cases}$

En la transformación (1) se ha suprimido la tercera ecuación pues es el resultado de restar la primera menos la segunda, en la transformación (2) se ha multiplicado la primera por 3 y la segunda por 3, y en la transformación (3) a la segunda ecuación se le ha sumado la primera. Observa que el último sistema es fácil de resolver.

6. Clasificación de los sistemas según su número de soluciones. Ejemplos

Un sistema de ecuaciones se dice que es *compatible* si tiene solución. Si no tiene solución se dice que es *incompatible*. Los sistemas compatibles pueden ser de dos tipos: *compatible determinado* si el sistema tiene una única solución, y *compatible indeterminado* si tiene infinitas soluciones.

Por ejemplo, el sistema anterior es compatible determinado, pues tiene una única solución ($x=2$, $y=1$). Geométricamente significa que las rectas $2x-5y=-1$, $-3x+y=-5$, $5x-6y=4$ son *secantes*, es decir, se cortan en un punto, el punto de coordenadas (2, 1).

Otro ejemplo: $\begin{cases} x-3y=5 \\ -2x+6y=1 \end{cases} \xrightarrow{(1)} \begin{cases} 2x-6y=10 \\ -2x+6y=1 \end{cases} \xrightarrow{(2)} \begin{cases} 2x-6y=10 \\ 0=11 \end{cases}$ (¡interpreta tú las transformaciones (1) y

(2)!). Observa que la ecuación $0=11$ es contradictoria. Esto quiere decir que el sistema no tiene solución: es un sistema incompatible. Geométricamente significa que las rectas $x-3y=5$, $-2x+6y=1$, son *paralelas*.

Hagamos ahora un par de ejemplos de sistemas de tres ecuaciones con tres incógnitas:

$$\bullet \begin{cases} -3x+y-2z=1 \\ 2x-3y+z=-1 \\ x+5y-z=-2 \end{cases} \xrightarrow{\begin{matrix} 3f_2+2f_1 \\ 3f_3+f_1 \end{matrix}} \begin{cases} -3x+y-2z=1 \\ -7y-z=-1 \\ 16y-5z=-5 \end{cases} \xrightarrow{7f_3+16f_2} \begin{cases} -3x+y-2z=1 \\ -7y-z=-1 \\ -51z=-51 \end{cases} \quad (\text{¡prueba a analizar tú las}$$

transformaciones teniendo en cuenta que el significado de f_1 , f_2 y f_3 es “fila 1, fila 2 y fila 3”, respectivamente!). Es fácil deducir del último sistema que la solución del sistema es $x=-1$, $y=0$, $z=1$ y que, por tanto, el sistema es compatible determinado. Geométricamente quiere decir que los tres planos son *secantes en un punto*, es decir, que se “tocan” en un único punto de coordenadas (-1, 0, 1).

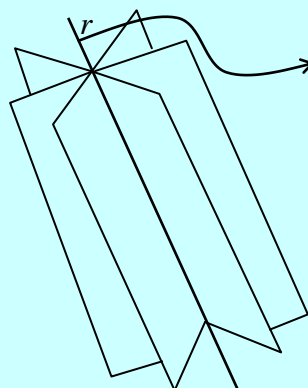
$$\bullet \begin{cases} 2x+3y-z=5 \\ -x-y+z=0 \\ -4x-7y+z=-15 \end{cases} \xrightarrow{\begin{matrix} 2f_2+f_1 \\ f_3+2f_1 \end{matrix}} \begin{cases} 2x+3y-z=5 \\ y+z=5 \\ -y-z=-5 \end{cases} \xrightarrow{f_3+f_2} \begin{cases} 2x+3y-z=5 \\ y+z=5 \\ y+z=5 \end{cases} \quad \text{Observa que al realizar la}$$

última transformación “desaparece” la última ecuación pues sale $0x+0y+0z=0 \Leftrightarrow 0=0$, que no aporta nada. En este caso (cuando al final el número de incógnitas es mayor que el número de ecuaciones) hay infinitas soluciones: el sistema es compatible indeterminado. Para calcularlas se procede de la siguiente manera: a una de las dos incógnitas de la última ecuación se le nombra con otra letra (generalmente la letra griega λ), que recibe el nombre de *parámetro*. Este parámetro se pasa al segundo miembro y se resuelve el sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas resultante. Veámoslo:

$$\text{llamemos } z=\lambda \Rightarrow \begin{cases} 2x+3y-\lambda=5 \\ y+\lambda=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x+3y=5+\lambda \\ y=5-\lambda \end{cases} \quad \text{Sustituyendo el valor de } y \text{ en la primera}$$

ecuación, operando y despejando la incógnita x , se obtiene:

$2x-3(5-\lambda)=5+\lambda \Rightarrow 2x-15+3\lambda=5+\lambda \Rightarrow 2x=20-2\lambda \Rightarrow x=10-\lambda$. Por tanto las infinitas soluciones del sistema se dan de la siguiente manera: $x=10-\lambda$, $y=5-\lambda$, $z=\lambda$ o mediante la terna $(10-\lambda, 5-\lambda, \lambda)$. Geométricamente significa que los planos $2x+3y-z=5$, $-x-y+z=0$, $-4x-7y+z=15$ son *secantes según una recta*, o bien que forman un *haz de planos de base la recta* $(10-\lambda, 5-\lambda, \lambda)$. Vamos, que los tres planos se cortan en una recta.



Todos los puntos de la recta son de la forma $(10-\lambda, 5-\lambda, \lambda)$

7. Sistemas escalonados

En los ejemplos anteriores, después de hacer las transformaciones pertinentes, se obtienen sistemas muy fáciles de resolver pues, desde abajo hacia arriba, vamos obteniendo el valor de cada incógnita por el método de sustitución. Este tipo de sistemas se llaman *sistemas escalonados*.

Observa que en el caso del segundo ejemplo, donde el sistema era compatible indeterminado, el procedimiento

de sustituir z por el parámetro λ nos lleva a un sistema escalonado, $\begin{cases} 2x + 3y - \lambda = 5 \\ y + \lambda = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + 3y = 5 + \lambda \\ y = 5 - \lambda \end{cases}$ que,

como vimos, también es muy fácil de resolver aunque las soluciones sean infinitas.

Hay sistemas que son escalonados, aunque a simple vista parece que no lo son. Veamos un par de ejemplos:

El sistema $\begin{cases} 2x - 3y = -1 \\ 2y = 2 \\ 3x - 2y + 5z = 6 \end{cases}$ no parece, aparentemente, escalonado. Pero fíjate lo que ocurre si: Primero,

intercambiamos sus ecuaciones adecuadamente: $\begin{cases} 3x - 2y + 5z = 6 \\ 2x - 3y = -1 \\ 2y = 2 \end{cases}$. Segundo, si la incógnita z la ponemos en

primer lugar, la incógnita x en segundo y la incógnita y en tercer lugar, el sistema queda así: $\begin{cases} 5z + 3x - 2y = 6 \\ 2x - 3y = -1 \\ 2y = 2 \end{cases}$.

Ahora si se ve claramente que es escalonado y fácil de solucionar (comprueba que la solución es $x = 1$, $y = 1$, $z = 1$)

8. Matriz asociada a un sistema de ecuaciones lineales

Un sistema, por ejemplo, de tres ecuaciones con tres incógnitas se puede escribir genéricamente así:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases}$$

donde a_{ij} son números reales llamados *coeficientes*; b_1 , b_2 , b_3 también son números reales llamados *términos independientes* y las incógnitas son x , y , z .

Si escribimos los coeficientes en filas y columnas obtenemos una expresión de la forma: $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, que

llamaremos *matriz de los coeficientes*. A veces se designa con la letra mayúscula A . Si a la matriz de los coeficientes le añadimos una columna con los términos independientes tendremos la expresión:

$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{pmatrix}$, que recibe el nombre de *matriz ampliada* o *matriz asociada al sistema*. A veces se

designa con la letra mayúscula B .

9. Método de Gauss

El proceso de transformación de un sistema de ecuaciones en otro equivalente, pero escalonado recibe el nombre de *método de Gauss*. En la práctica el método no se aplica con las ecuaciones, sino que se trabaja con la matriz asociada al sistema, con lo que se simplifica bastante el proceso de transformaciones sucesivas. Por tanto, una vez expresado el sistema mediante su matriz asociada, el método consiste en “hacer ceros”, hasta llegar a una matriz asociada a un sistema escalonado. Para ello podemos hacer dos tipos de transformaciones, que nos llevarán a matrices asociadas a sistemas equivalentes:

- Multiplicar o dividir una fila por un número distinto de cero
- Sumar a una fila otra, previamente multiplicada por un número distinto de cero.

9.1. Al aplicar el método de Gauss, ¿qué ocurre al finalizar el proceso, o incluso en algún paso intermedio?

- *Que salga una fila de ceros.* Entonces esta fila se corresponderá con una ecuación trivial y podremos prescindir de ella (es lo que ocurriría en el segundo ejemplo de la página 2).
- *Que obtengamos dos filas iguales o proporcionales.* Entonces podemos eliminar una de las dos, pues se corresponden con ecuaciones equivalentes.
- *Que obtengamos una fila de ceros, salvo el último número, que es distinto de cero.* Entonces se trata de una ecuación imposible y, en este caso, el sistema es incompatible.

Conclusión: una vez finalizado el proceso llegaremos a una de las tres posibilidades siguientes, o equivalentes a alguna de ellas:

I.
$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ 0 & 0 & a_{33} & b_3 \end{pmatrix}$$
, donde a_{33} es un número distinto de cero y b_3 un número real cualquiera. En este

caso tenemos tantas ecuaciones como incógnitas. Se obtiene un sistema escalonado, del que es muy fácil obtener la única solución. El sistema es **compatible determinado**.

II.
$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ 0 & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ 0 & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
, donde a_{22} es un número distinto de cero. En este caso hay

menos ecuaciones que incógnitas. Se procede como en el segundo ejemplo de la página 2, con lo que habrá infinitas soluciones. El sistema es **compatible indeterminado**.

III.
$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ 0 & 0 & 0 & b_3 \end{pmatrix}$$
, donde b_3 es distinto de cero. Esto es imposible y el sistema es **incompatible**.

Veamos un par de ejemplos:

- Apliquemos el método de Gauss a la resolución del sistema
$$\begin{cases} -x + y + 3z = -2 \\ 4x + 2y - z = 5 \\ 2x + 4y - 7z = 1 \end{cases}$$
. Transformando la matriz

asociada:
$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 & -2 \\ 4 & 2 & -1 & 5 \\ 2 & 4 & -7 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{f_2+4f_1 \\ 2f_3-f_2}} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 6 & 11 & -3 \\ 0 & 6 & -13 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_3-f_2} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 6 & 11 & -3 \\ 0 & 0 & -24 & 0 \end{pmatrix}$$
. Nos encontramos

en el caso I: el sistema es compatible determinado. El sistema asociado es:
$$\begin{cases} -x + y + 3z = -2 \\ 6y + 11z = -3 \\ -24z = 0 \end{cases}$$
, sistema

escalonado cuyas soluciones son muy fáciles de obtener: $z = 0$, $y = -\frac{1}{2}$, $x = \frac{3}{2}$.

- Resolvamos ahora el sistema
$$\begin{cases} x - y + 2z = 1 \\ 2x + 3y - z = -1 \\ -x - 4y + 3z = 5 \end{cases}$$
. Escribamos la matriz asociada y hagamos las

transformaciones oportunas:
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & -4 & 3 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{f_2-2f_1 \\ 2f_3+f_2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & -5 & -3 \\ 0 & -5 & 5 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_3+f_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$
.

Estamos en el caso III. Por tanto el sistema es incompatible y no tiene solución. Observa que el sistema

asociado es
$$\begin{cases} x - y + 2z = 1 \\ 5y - 5z = -3 \\ 0z = 6 \end{cases}$$
. La última de las ecuaciones no tiene sentido. Por eso el sistema es

incompatible.

10. Discusión de sistemas de ecuaciones dependientes de un parámetro

Hay sistemas que dependen de un parámetro. Por ejemplo
$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x - y - z = -3 \\ x + ky - 3z = 0 \end{cases}$$
. Este tipo de sistemas son en

realidad “muchos sistemas”. Hay uno para cada valor del parámetro k . De todos ellos algunos serán compatibles y otros incompatibles. Por tanto, discutir un sistema dependiente de un parámetro consiste en encontrar los valores del parámetro para los que el sistema es compatible o no y, caso de ser compatible, distinguir cuándo es determinado o indeterminado. Para ello se procede igual que en los ejemplos anteriores, utilizando el método de Gauss y tomando el parámetro como si fuera un número. Como ejemplo, discutamos el sistema anterior.

Tomemos la matriz asociada y apliquemos las transformaciones oportunas:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & -1 & -3 \\ 1 & k & -3 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{f_2 - 2f_1 \\ f_3 - f_1}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -3 & -3 & -15 \\ 0 & k-1 & -4 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_3 / (-3)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & k-1 & -4 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_3 - (k-1)f_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -3-k & -1-5k \end{pmatrix}$$

Obsérvese ahora que si $-3-k=0$, es decir si $k=-3$, entonces estamos en el caso III y el sistema es

incompatible: la última matriz es, en este caso,
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 14 \end{pmatrix}$$
, con lo que la última ecuación ($0=14$) es

imposible.

Ahora bien, si $k \neq -3$, estamos en el caso I, pues $-3-k \neq 0$, y el sistema será compatible determinado

(solución única). En este caso el sistema asociado a la última matriz es
$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ y + z = 5 \\ (-3-k)z = -1-5k \end{cases}$$
. De aquí se deduce

que $z = \frac{-1-5k}{-3-k} = \frac{(-1)(5k+1)}{(-1)(k+3)} \Rightarrow z = \frac{5k+1}{k+3}$. Sustituyendo en la segunda ecuación: $y + \frac{5k+1}{k+3} = 5 \Rightarrow$

$y = 5 - \frac{5k+1}{k+3} = \frac{5(k+3) - 5k - 1}{k+3} = \frac{5k+15-5k-1}{k+3} \Rightarrow y = \frac{14}{k+3}$. Finalmente, sustituyendo en la primera:

$x + \frac{14}{k+3} + \frac{5k+1}{k+3} = 6 \Rightarrow x + \frac{5k+15}{k+3} = 6 \Rightarrow x = 6 - \frac{5k+15}{k+3} = \frac{6(k+3) - 5k - 15}{k+3} = \frac{6k+18-5k-15}{k+3} = \frac{k+3}{k+3} \Rightarrow x = 1$

Resumiendo:

- Si $k = -3$, el sistema es incompatible: no tiene solución. Es el caso del sistema
$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x - y - z = -3 \\ x - 3y - 3z = 0 \end{cases}$$

ha sustituido k por -3 .

- Si $k \neq -3$, el sistema es compatible es determinado: solución única, una para cada valor de k . Tal solución única es $x = 1$; $y = \frac{14}{k+3}$; $z = \frac{5k+1}{k+3}$.

Por ejemplo si $k = -1$, el sistema es
$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x - y - z = -3 \\ x - y - 3z = 0 \end{cases}$$
 (donde se ha sustituido k por -1) y la única solución

es: $x = 1$; $y = 7$; $z = -2$. Es conveniente insistir en que para cada $k \neq -3$ hay un sistema y una única solución para ése valor de k .