INTEGRAL INDEFINIDA. MÉTODOS DE INTEGRACIÓN

Método de integración por cambio de variable

Consiste en sustituir x por una función adecuada para que la expresión resultante sea más sencilla de integrar que la primera.

Si x es función de t: $x=g(t)$, entonces la diferencial de x es: $dx=g'(t)dt$, con lo cual:

$$\boxed{\int f(x)dx=\int f(g(t))g'(t)dt}$$

Aplicaremos este método cuando la segunda integral sea más fácil de calcular que la primera. La cuestión más difícil es saber la función $g(t)$ adecuada en cada caso.

Ejemplo 1

Calcular la siguiente integral: $\int\sqrt{1-x^2}\,dx$

Llamando $x=\operatorname{sen} t$, será $dx=\cos t\,dt$, y la integral anterior se puede escribir:

$$\int\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 t}\cos x=\int\cos^2 t dt=\frac{t}{2}+\frac{\operatorname{sen}2t}{4}+C=\frac{t}{2}+\frac{2\operatorname{sen}t\cos t}{4}+C=(*)$$

Si $x=\operatorname{sen} t$, entonces $t=\operatorname{arcsen} x$, y además $\cos t=\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 t}=\sqrt{1-x^2}$. Por lo tanto,

$$(*)=\frac{\operatorname{arcsen} x}{2}+\frac{x\sqrt{1-x^2}}{2}+C$$

Nota: La integral $\int\cos^2 t\,dt$ se ha realizado teniendo en cuenta la siguiente igualdad trigonométrica:

$$\cos^2 t=\frac{1+\cos 2t}{2}$$

Generalmente, al hacer un cambio de variable, se escribe *t* en función de *x*, en lugar de *x* en función de *t*, es decir, se hace $t=h(x)$, con lo cual será: $dt=h'(x)dx$.

Ejemplo 2

Calcular la siguiente integral: $\int\frac{10x+5}{(x^2+x)^3}dx$

Retoquemos un poco:

$$\int\frac{10x+5}{(x^2+x)^3}dx=5\int\frac{2x+1}{(x^2+x)^3}dx=(*)$$

Llamando $t=x^2+x$, será $dt=(2x+1)dx$, luego:

$$(*)=5\int\frac{dt}{t^3}=5\int t^{-3}dt=-\frac{5}{2}t^{-2}+C=\frac{-5}{2(x^2+x)^2}+C$$

Método de integración por partes

Consiste en aplicar la fórmula de la derivabilidad del producto:

$$(u\cdot v)'=u'\cdot v+u\cdot v'\Rightarrow u\cdot v'=(u\cdot v)'-u'\cdot v$$

Integrando en ambas partes: $\int u\cdot v'dx=\int\left((u\cdot v)'-u'\cdot v\right)dx=\int(u\cdot v)'dx-\int u'\cdot v\,dx$.

Así pues: $\int u\cdot v'dx=u\cdot v-\int u'\cdot v\,dx$, fórmula más conocida de la forma:

$$\boxed{\int u\,dv=uv-\int v\,du}$$

que se puede memorizar así: *"**u**n **día** **vi** **u**na **vaca** **v**estida **de** **u**niforme"*.

Podemos aplicar la fórmula anterior para calcular una integral del tipo $\int u\,dv$ siempre que sepamos calcular v y $\int v\,du$.

Ejemplo 3

Calcular la siguiente integral: $\int x\cos x\,dx$.

Esta integral es del tipo $\int u\,dv$, siendo: $\begin{cases}u=x\\ dv=\cos x\,dx\end{cases}$

De aquí se deduce que: $\begin{cases}du=dx\\ v=\operatorname{sen} x\end{cases}$

Aplicando la fórmula de integración por partes tenemos:

$$\int x\cos x\,dx=x\operatorname{sen} x-\int\operatorname{sen} x\,dx=x\operatorname{sen} x+\cos x+C$$

Ejemplo 4

Calcular la siguiente integral: $\int\operatorname{arctg} x\,dx$.

Esta integral es del tipo $\int u\,dv$, siendo: $\begin{cases}u=\operatorname{arctg} x\\ dv=dx\end{cases}$. De aquí se deduce que $\begin{cases}du=\dfrac{1}{1+x^2}\\ v=x\end{cases}$.

Aplicando la fórmula de integración por partes tenemos:

$$\int\operatorname{arctg} x\,dx=x\operatorname{arctg} x-\int\frac{1}{1+x^2}dx=x\operatorname{arctg} x-\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)+C$$

Ejemplo 5

Calcular la siguiente integral: $\int x^p e^x dx$ siendo p un número natural.

Esta integral es del tipo $\int u\,dv$, siendo: $\begin{cases} u = x^p \\ dv = e^x dx \end{cases}$. De aquí se deduce que: $\begin{cases} du = px^{p-1}dx \\ v = e^x \end{cases}$

Aplicando la fórmula de la integración por partes tenemos:

$$\int x^p e^x dx = x^p e^x - p\int x^{p-1}e^x dx$$

De esta forma el cálculo de la primera integral se ha convertido en el cálculo de otra integral del mismo tipo en la que el exponente p se ha rebajado una unidad. Realizando el proceso p veces se llega a la integral $\int e^x dx$ que es inmediata.

Otras veces, al aplicar la integración por partes llegamos a la misma integral que teníamos al principio, y entonces, podemos calcularla pasándola al primer miembro y despejándola.

Ejemplo 6

Calcular la integral: $\int \operatorname{sen}^4 x\,dx$.

Esta integral es del tipo $\int u\,dv$, siendo: $\begin{cases} u = \operatorname{sen}^3 x \\ v = \operatorname{sen} x \end{cases}$. Por lo tanto: $\begin{cases} du = 3\operatorname{sen}^2 x \cos x\,dx \\ v = -\cos x \end{cases}$

Aplicando la fórmula de integración por partes tenemos:

$$\int \operatorname{sen}^4 x\,dx = -\operatorname{sen}^3 x\cos x + 3\int \operatorname{sen}^2 x\cos^2 x\,dx = -\operatorname{sen}^3 x\cos x + 3\int \operatorname{sen}^2 x\left(1-\operatorname{sen}^2 x\right)dx =$$

$$= -\operatorname{sen}^3 x\cos x + 3\int \operatorname{sen}^2 x\,dx - 3\int \operatorname{sen}^4 x\,dx = (*)$$

$$(*) = -\operatorname{sen}^3 x\cos x + \frac{3}{2}x - \frac{3}{4}\operatorname{sen} 2x - 3\int \operatorname{sen}^4 x\,dx$$

Observemos que la última integral es precisamente la que queríamos calcular, luego si la pasamos al primer miembro tenemos:

$$4\int \operatorname{sen}^4 x dx = -\operatorname{sen}^3 x\cos x + \frac{3}{2}x - \frac{3}{4}\operatorname{sen} 2x$$

Finalmente:

$$\int \operatorname{sen}^4 x\,dx = -\frac{1}{4}\operatorname{sen}^3 x\cos x + \frac{3}{8}x - \frac{3}{16}\operatorname{sen} 2x + C$$

Nota: En el paso $(*)$ se ha utilizado que $\int \operatorname{sen}^2 x\,dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\operatorname{sen}2x$.

Integración de funciones racionales

Una función racional es de la forma $y=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, donde $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios.

Si el grado del numerador es mayor o igual que el grado del denominador, se divide el primero por el segundo, con lo cual se obtiene un cociente $C(x)$ y un resto $R(x)$.

Entonces se cumple: $P(x)=Q(x)\cdot C(x)+R(x)$, luego:

$$\boxed{\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{Q(x)C(x)+R(x)}{Q(x)}=C(x)+\frac{R(x)}{Q(x)}}$$

Ejemplo 7

Calcular la siguiente integral: $\displaystyle\int\frac{x^5-2x^4 10x^3+16x^2+18x-9}{x^2-2x-3}\,dx$

Como el grado del numerador es 5 y el del denominador es 2, dividimos el primero por el segundo y obtenemos x^3-7x+2 de cociente y $x-3$ de resto. Por lo tanto:

$$\int\frac{x^5-2x^4-10x^3+16x^2+18x-9}{x^2-2x-3}\,dx=\int\left(x^3-7x+2+\frac{x-3}{x^2-2x+3}\right)dx=$$

$$=\frac{x^4}{4}-\frac{7x^2}{2}+2x+\int\frac{x-3}{x^2-2x+3}\,dx$$

Como los polinomios son sencillos de integrar, el problema se ha reducido al cálculo de una integral del tipo $\displaystyle\int\frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$, siendo el grado del numerador menor que el del denominador.

En primer lugar descomponemos en factores el denominador $Q(x)$. Vamos a considerar los tres casos siguientes:

1º) $Q(x)$ tiene solamente raíces reales simples

Supongamos que éstas son $x_1,x_2,\ldots,x_n$. Entonces: $Q(x)=a_0(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)$ y podemos escribir: $\dfrac{P(x)}{Q(x)}=\dfrac{A_1}{x-x_1}+\dfrac{A_2}{x-x_2}+\ldots+\dfrac{A_n}{x-x_n}$, donde $A_1,A_2,\ldots,A_n$ son números que se calculan de la forma que veremos en el siguiente ejemplo.

Por lo tanto:

$$\boxed{\begin{aligned}\int\frac{P(x)}{Q(x)}\,dx&=\int\frac{A_1}{x-x_1}\,dx+\int\frac{A_2}{x-x_2}\,dx+\ldots+\int\frac{A_n}{x-x_n}\,dx=\\&=A_1\ln(x-x_1)+A_2\ln(x-x_2)+\ldots+A_n\ln(x-x_n)\end{aligned}}$$

Ejemplo 8

Calcular la siguiente integral: $\int \frac{3x+2}{2x^3+9x^2+7x-6}\,dx$

Resolviendo la ecuación $2x^3+9x^2+7x-6=0$ encontramos sus soluciones:

$x_1=\frac{1}{2}$, $x_2=-2$, $x_3=-3$, que son reales y distintas.

Entonces:

$$2x^3+9x^2+7x-6=2\left(x-\frac{1}{2}\right)(x+2)(x+3)=(2x-1)(x+2)(x+3)$$

$$\frac{3x+2}{2x^3+9x^2+7x-6}=\frac{A}{2x-1}+\frac{B}{x+2}+\frac{C}{x+3}$$

y vamos a hallar los números A, B, C, que cumplan esta condición.

La suma de las tres fracciones del segundo miembro es:

$$\frac{A(x+2)(x+3)+B(2x-1)(x+3)+C(2x-1)(x+2)}{(2x-1)(x+2)(x+3)}$$

y como

$$2x^3+9x^2+7x-6=(2x-1)(x+2)(x+3)$$

los numeradores también deberán de ser iguales, luego:

$$3x+2=A(x+2)(x+3)+B(2x-1)(x+3)+C(2x-1)(x+2)$$

Esta igualdad es cierta para cualquier valor que demos a x.

En particular, si hacemos $x=\frac{1}{2}$ resulta:

$$3\cdot\frac{1}{2}+2=A\left(\frac{1}{2}+2\right)\left(\frac{1}{2}+3\right)+B\left(2\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}+3\right)+C\left(2\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}+2\right)\Rightarrow\frac{7}{2}=A\frac{5}{2}\cdot\frac{7}{2}$$

de donde $A=\frac{2}{5}$. Análogamente, si hacemos $x=-2$ resulta $B=\frac{4}{5}$, y si hacemos $x=-3$ resulta $C=-1$. Por lo tanto:

$$\int\frac{3x+2}{2x^3+9x^2+7x-6}\,dx=\int\left(\frac{2/5}{2x-1}+\frac{4/5}{x+2}+\frac{-1}{x+3}\right)dx=$$

$$=\frac{1}{5}\ln(2x-1)+\frac{4}{5}\ln(x+2)-\ln(x+3)+C$$

2º) $Q(x)$ tiene raíces reales múltiples

Supongamos que x_1 es una raíz múltiple de orden k. Eso significa que en la descomposición de $Q(x)$ aparecerá $(x-x_1)^k$. Entonces se opera de una forma similar al apartado anterior, haciendo una descomposición en suma de fracciones. La raíz x_1 dará origen a la suma de fracciones: $\frac{A_1}{(x-x_1)^k}+\frac{A_2}{(x-x_1)^{k-1}}+\ldots+\frac{A_k}{x-x_1}$, donde $A_1, A_2, \ldots, A_k$ son números que se calculan de la forma que veremos en el ejemplo siguiente. Integrando la suma de fracciones anterior tenemos:

$$\int \frac{A_1}{(x-x_1)^k}dx+\int \frac{A_2}{(x-x_1)^{k-1}}dx+\ldots+\int \frac{A_k}{x-x_1}dx=$$
$$=\frac{A_1}{-k+1}(x-x_1)^{-k+1}+\frac{A_2}{-k+2}(x-x_1)^{-k+2}+\ldots+A_k\ln(x-x_1)+C$$

Ejemplo 9

Calcular la siguiente integral: $\int \frac{1}{x^4-x^3-3x^2+5x-2}dx$.

Resolviendo la ecuación $x^4-x^3-3x^2+5x-2=0$ encontramos que sus soluciones son $x_1=1$ y $x_2=-2$, siendo x_1 una raíz triple, es decir: $x^4-x^3-3x^2+5x-2=(x-1)^3(x+2)$.

Luego: $\frac{1}{x^4-x^3-3x^2+5x-2}=\frac{A}{(x-1)^3}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{x-1}+\frac{D}{x+2}$, y vamos a hallar los números *A*, *B*, *C*, *D* que cumplen esta condición. La suma de las cuatro fracciones del segundo miembro es:

$$\frac{A(x+2)+B(x-1)(x+2)+C(x-1)^2(x+2)+D(x-1)^3}{(x-1)^3(x+2)}$$

y como $x^4-x^3-3x^2+5x-2=(x-1)^3(x+2)$, los numeradores deberán ser iguales, luego:

$$1=A(x+2)+B(x-1)(x+2)+C(x-1)^2(x+2)+D(x-1)^3$$

Esta igualdad es cierta para cualquier valor que demos a *x*.

En particular, si hacemos $x=-2: 1=D(-2-1)^3\Rightarrow 1=-27D\Rightarrow D=-1/27$, si hacemos $x=1$: $1=A(1+2)\Rightarrow 1=3A\Rightarrow A=1/3$.

Si hacemos $x=0$: $1=2A-2B+2C-D\Rightarrow -2B+2C=1-2A+D\Rightarrow -2B+2C=\frac{8}{27}$,

y si hacemos $x=2$: $1=4A+4B+4C+D\Rightarrow 4B+4C=1-4A-D\Rightarrow 4B+4C=-\frac{8}{27}$

Resolviendo el sistema formado por las dos últimas ecuaciones se obtiene $B=-1/9, C=1/27$

$$\int \frac{1}{x^4-x^3-3x^2+5x-2}dx=\int\left(\frac{1/3}{(x-1)^3}+\frac{-1/9}{(x-1)^2}+\frac{1/27}{x-1}+\frac{-1/27}{x+2}\right)dx=$$
$$=-\frac{1}{6(x-1)^2}+\frac{1}{9(x-1)}+\frac{1}{27}\ln(x-1)-\frac{1}{27}\ln(x+2)+C$$

3º) $Q(x)$ tiene raíces imaginarias simples

Entonces la descomposición en fracciones simples de $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ da lugar a fracciones de la forma $\dfrac{hx+k}{ax^2+bx+c}$, donde h, k son números que se calculan de la forma que veremos en los ejemplos siguientes, y las raíces de ax^2+bx+c son imaginarias.

Veamos cómo se calcula la integral $\displaystyle\int \frac{hx+k}{ax^2+bx+c}\,dx$.

Vamos a distinguir dos casos, según que sea o no sea nulo el valor de h del numerador $hx + k$.

$h = 0$

Entonces aplicamos al denominador el método del completamiento del cuadrado. De esta forma, el denominador ax^2+bx+c toma la forma $a\left((x+m)^2+n^2\right)$.

Así pues, $\displaystyle\int \frac{k}{ax^2+bx+c}\,dx = \int \frac{k}{a\left((x+m)^2+n^2\right)}\,dx = \frac{k}{a}\int \frac{1}{(x+m)^2+n^2}\,dx =$

$\displaystyle= \frac{k}{an^2}\int \frac{1}{\left(\frac{x+m}{n}\right)^2+1}\,dx = (*)$. Si hacemos ahora el cambio de variable: $t=\dfrac{x+m}{n}$; $dt=\dfrac{dx}{n} \Rightarrow dx = n\,dt$.

Entonces se tiene que $\displaystyle(*) = \frac{k}{an}\int \frac{dt}{t^2+1} = \frac{k}{an}\operatorname{arctg} t + C = \frac{k}{an}\operatorname{arctg}\left(\frac{x+m}{n}\right)+C$.

Ejemplo 10

Calcular la siguiente integral: $\displaystyle\int \frac{5}{2x^2-12x+26}\,dx$

Aplicando el método del completamiento del cuadrado al polinomio $2x^2-12x+26$:

$$2x^2-12x+26 = 2\left(x^2-6x+13\right) = 2\left(x^2-2x+3^2-3^2+13\right) = 2\left((x-3)^2+4\right)$$

Por lo tanto,

$$\int \frac{5}{2x^2-12x+26}\,dx = \int \frac{5dx}{2\left((x-3)^2+4\right)} = \frac{5}{2}\int \frac{dx}{(x-3)^2+4} =$$

$$= \frac{5}{2\cdot 4}\int \frac{dx}{\frac{(x-3)^2}{4}+1} = \frac{5}{2\cdot 4}\int \frac{dx}{\left(\frac{x-3}{2}\right)^2+1} = (*)$$

Haciendo el cambio de variable: $t=\dfrac{x-3}{2} \Rightarrow dt = \dfrac{1}{2}dx \Rightarrow dx = 2dt$ tenemos:

$$(*) = \frac{5}{8}\int \frac{2\,dt}{t^2+1} = \frac{10}{8}\operatorname{arctg} t + C = \frac{5}{4}\operatorname{arctg}\left(\frac{x-3}{2}\right)+C$$

$h \neq 0$

Entonces descomponemos el numerador $hx+k$ buscando una expresión que sea la derivada del denominador (es decir, $2ax+b$), y procedemos de la siguiente forma:

$$hx+k=h\left(x+\frac{k}{h}\right)=\frac{h}{2a}\left(2ax+\frac{2ak}{h}\right)=\frac{h}{2a}\left(2ax+b-b+\frac{2ak}{h}\right)$$

Llamando $p=\dfrac{2ak}{h}-b$, tenemos:

$$\int\frac{hx+k}{ax^2+bx+c}dx=\frac{h}{2a}\int\frac{2ax+b+p}{ax^2+bx+c}dx=\frac{h}{2a}\int\frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}dx+$$

$$+\frac{h}{2a}\int\frac{p}{ax^2+bx+c}dx=\frac{h}{2a}\ln\left(ax^2+bx+c\right)+\frac{h}{2a}\int\frac{p}{ax^2+bx+c}dx$$

Esta última integral carece de término en x en el numerador, luego se calcula por el procedimiento visto en el apartado anterior, para $h=0$.

Ejemplo 11

Calcular la siguiente integral: $\displaystyle\int\frac{4x+3}{x^2+2x+50}dx$

Teniendo en cuenta que la derivada del denominador es $2x+2$, transformamos el numerador de la siguiente forma:

$$4x+3=4\left(x+\frac{3}{4}\right)=\frac{4}{2}\left(2x+\frac{3}{2}\right)=2\left(2x+2-2+\frac{3}{2}\right)=2(2x+2)-1$$

Por lo tanto:

$$\int\frac{4x+3}{x^2+2x+50}dx=\int\frac{2(2x+2)-1}{x^2+2x+50}dx=2\int\frac{2x+2}{x^2+2x+50}dx-\int\frac{1}{x^2+2x+50}dx=$$

$$=2\ln\left(x^2+2x+50\right)-\int\frac{1}{x^2+2x+50}dx$$

Esta última integral se calcula así:

$$x^2+2x+50=x^2+2\cdot x\cdot 1+50=x^2+2\cdot x\cdot 1+1^2-1^2+50=(x+1)^2+49\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\int\frac{1}{x^2+2x+50}dx=\int\frac{1}{(x+1)^2+49}dx=\frac{1}{49}\int\frac{dx}{\frac{(x+1)^2}{49}+1}=$$

$$=\frac{1}{49}\int\frac{dx}{\left(\frac{x+1}{7}\right)^2+1}=\frac{1}{7}\int\frac{1/7}{\left(\frac{x+1}{7}\right)^2+1}dx=\frac{1}{7}\operatorname{arctg}\left(\frac{x+1}{7}\right)+C$$

Finalmente tenemos:

$$\int\frac{4x+3}{x^2+2x+50}dx=2\ln\left(x^2+2x+50\right)-\frac{1}{7}\operatorname{arctg}\left(\frac{x+1}{7}\right)+C$$

Ejemplo 12

Calcular la siguiente integral: $\int \frac{x^2+15x-38}{x^3-7x^2+9x+17}\,dx$.

Resolviendo la ecuación $x^3-7x^2+9x+17=0$ encontramos que tiene $x_1=-1$ como única solución real. Entonces:

$$x^3-7x^2+9x+17=(x+1)\left(x^2-8x+17\right)$$

Así pues:

$$\frac{x^2+15x-38}{x^3-7x^2+9x+17}=\frac{A}{x+1}+\frac{hx+k}{x^2-8x+17}$$

y vamos a hallar los números *A*, *h* y *k* que cumplen esta condición.

La suma de las dos fracciones del segundo miembro es:

$$\frac{A\left(x^2-8x+17\right)+(hx+k)(x+1)}{(x+1)\left(x^2-8x+17\right)}$$

luego:

$$x^2+15x-38=A\left(x^2-8x+17\right)+(hx+k)(x+1)$$

Esta igualdad es cierta para todo valor que le demos a *x*. En particular, si hacemos $x=-1$, resulta: $-52=A\cdot 26$, de donde $A=-2$. Análogamente, si hacemos $x=0$ resulta $k=-4$, y si hacemos $x=1$ resulta $h=3$.

Por lo tanto:

$$\int \frac{x^2+15x-38}{x^3-7x^2+9x+17}\,dx=\int \frac{-2}{x+1}\,dx+\int \frac{3x-4}{x^2-8x+17}\,dx$$

La primera de estas dos integrales es: $-2\ln(x+1)$.

Para calcular la segunda integral tengamos en cuenta que la derivada del denominador

es $2x-8$, luego el numerador se transforma así:

$$3x-4=3\left(x-\frac{4}{3}\right)=\frac{3}{2}\left(2x-\frac{8}{3}\right)=\frac{3}{2}\left(2x-8+8-\frac{8}{3}\right)=\frac{3}{2}(2x-8)+8$$

y la segunda de las dos integrales anteriores se convierte en:

$$\frac{3}{2}\int \frac{2x-8}{x^2-8x+17}\,dx+8\int \frac{1}{x^2-8x+17}\,dx=\frac{3}{2}\int \frac{2x-8}{x^2-8x+17}\,dx+$$

$$+8\int \frac{1}{(x-4)^2+1}\,dx=\frac{3}{2}\ln\left(x^2-8x+17\right)+8\,\mathrm{arctg}(x-4)$$

Por lo tanto, finalmente tenemos:

$$\int \frac{x^2+15x-38}{x^3-7x^2+9x+17}\,dx=-2\ln(x+1)+\frac{3}{2}\ln\left(x^2-8x+17\right)+8\,\mathrm{arctg}(x-4)+C$$