Matrices

Primeras definiciones

Una matriz es un conjunto de elementos (números) ordenado en filas y columnas. En general una matriz se nombra con una letra mayúscula y a sus elementos con letras minúsculas indicando en subíndices la fila y la columna que ocupan.

$$A=\left(\begin{array}{ccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots\ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{33} & \ldots\ldots & a_{2n} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \ldots\ldots & a_{mn} \end{array}\right)=\left(a_{i\,j}\right) \qquad \begin{cases} i=1,2,\ldots,m \\ j=1,2,\ldots,n \end{cases}$$

La matriz anterior tiene m filas y n columnas. Se suele decir que es de orden o dimensión $m\times n$. Los elementos a_{ij} son números reales $a_{ij}\in\mathbb{R}$. El primer subíndice, i, indica la fila y el segundo, j, indica la columna que ocupa el término a_{ij}.

Dos matrices son iguales cuando son del mismo orden y coinciden término a término. O sea, si $A=\left(a_{i\,j}\right)_{m\times n}$ y $B=\left(b_{i\,j}\right)_{m\times n}$, entonces

$$A=B\Leftrightarrow a_{ij}=b_{ij}\ ,\forall i=1,...,m\ ;\forall j=1,...,n$$

Dada una matriz $A=\left(a_{i\,j}\right)_{m\times n}$, se llama traspuesta de A, a otra matriz que denotaremos por A^t y que se obtiene al cambiar en A las filas por las columnas y las columnas por las filas. Es decir, $A^t=\left(a_{ji}\right)_{n\times m}$. Por ejemplo:

$$A=\left(\begin{array}{cccc} 1 & -2 & 0 & 3 \\ -5 & 4 & 6 & -7 \\ 0 & 2 & -1 & -4 \end{array}\right)\Rightarrow A^t=\left(\begin{array}{ccc} 1 & -5 & 0 \\ -2 & 4 & 2 \\ 0 & 6 & -1 \\ 3 & -7 & -4 \end{array}\right)$$

Obsérvese que, sea quién sea la matriz A, siempre se cumple que $(A^t)^t=A$.

Una matriz es cuadrada si tiene tantas filas como columnas. En este caso, en vez de decir que es de orden $n\times n$, diremos que es de orden n. Dada una matriz cuadrada A de orden n, se llama diagonal principal de la matriz A a los elementos a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn}.

Una matriz cuadrada A es simétrica si coincide con su traspuesta, es decir, si $A=A^t$. Por ejemplo, la matriz

$$C=\left(\begin{array}{ccc} 1 & -7 & 6 \\ -7 & 4 & 3 \\ 6 & 3 & -2 \end{array}\right)$$

es simétrica pues $C = C^t$. En este caso, además, los elementos de la diagonal principal son 1, 4, -2.
Una matriz cuadrada recibe el nombre de matriz triangular si los elementos situados por encima o por debajo de los que ocupan la diagonal principal son nulos. Por ejemplo, son matrices triangulares

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 6 \\ 0 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & -6 & 0 & 0 \\ 5 & -3 & 2 & 0 \\ -4 & 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Una matriz cuadrada se dice que es diagonal si los únicos elementos no nulos que puede tener son los de la diagonal principal. Por ejemplo, la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

es diagonal.

Operaciones con matrices
Hay tres operaciones básicas con matrices: producto de un número real por una matriz, suma de matrices y producto de matrices. Veremos con detenimiento cada una de ellas, pues no es posible sumar o multiplicar dos matrices cualesquiera.
Producto de un número por una matriz
Para multiplicar un número real k por una matriz $A = \left(a_{i\,j}\right)_{m\times n}$, se multiplica el número k por todos y cada uno de los términos de la matriz A: $kA = \left(ka_{i\,j}\right)_{m\times n}$. Por ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 8 & -7 & -3 \\ 4 & 5 & -9 \end{pmatrix} \Rightarrow -3A = \begin{pmatrix} -3 & 3 & -6 \\ -24 & 21 & 9 \\ -12 & -15 & 27 \end{pmatrix}$$

Suma de matrices
Para que dos matrices A y B puedan sumarse, es necesario que sean del mismo orden. En este caso, la suma se efectúa término a término: dadas $A = \left(a_{i\,j}\right)_{m\times n}$ y $B = \left(b_{i\,j}\right)_{m\times n}$, entonces $A + B = \left(a_{ij} + b_{ij}\right)_{m\times n}$. Por ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -5 \\ -2 & 4 & 6 \end{pmatrix} , B = \begin{pmatrix} 4 & 5 & -3 \\ 1 & 8 & -5 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A+B=\begin{pmatrix} 1 & -3 & -5 \\ -2 & 4 & 6 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 4 & 5 & -3 \\ 1 & 8 & -5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 & 2 & -8 \\ -1 & 12 & 1 \end{pmatrix}$$

Producto de una matriz fila por una matriz columna

Ni que decir tiene que una matriz fila es la formada por una sola fila y una matriz columna es la formada por una sola columna. Una matriz fila se puede multiplicar por una matriz columna si ambas tienen el mismo número de términos. Es decir si

$$A=\left(a_{1j}\right)_{1\times n}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \end{pmatrix},\ B=\left(b_{i1}\right)_{n\times 1}=\begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \ldots \\ b_{n1} \end{pmatrix}$$

el producto de ambas es

$$AB=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots\ldots & a_{1n} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \ldots \\ b_{n1} \end{pmatrix}=a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+\ldots\ldots+a_{1n}b_{n1}=\sum_{i=1}^{n}a_{1i}b_{i1}$$

Obsérvese que el resultado de multiplicar una matriz fila por una matriz columna es un número real. Por ejemplo:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 5 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow AB=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix}=1\cdot(-4)+(-2)\cdot(-2)+3\cdot(-5)+5\cdot 7=-4+4-15+35=20$$

Producto de matrices

Para que dos matrices puedan multiplicarse es necesario que el número de columnas de la primera coincida con el número de filas de la segunda. Concretamente, dadas $A=\left(a_{ik}\right)_{m\times p}$ y $B=\left(b_{kj}\right)_{p\times n}$ (observa que el número de columnas de la primera coincide con el número de filas de la segunda), se define el producto de A por B, de la siguiente forma:$A\cdot B=C=\left(c_{ij}\right)_{m\times n}$, donde c_{ij} es el producto de la fila i por la columna j, tal y como se vio en el apartado anterior:

$$c_{ij} = \begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & ..... & a_{ip} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ ... \\ b_{pj} \end{pmatrix} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + ... + a_{ip}b_{pj} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}$$

La matriz producto C tiene tantas filas como la matriz A (m) y tantas columnas como la matriz B (n).

Un ejemplo ilustrará muy bien la definición de producto de matrices. Sean

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 0 & 1 \\ 3 & -4 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 6 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 5 & 0 \\ 6 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

El producto $A \cdot B$ puede realizarse porque la matriz A tiene tantas columnas como filas tiene la matriz B (4). Entonces:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 0 & 1 \\ 3 & -4 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 6 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 5 & 0 \\ 6 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -2 \cdot 1 + (-3) \cdot 5 + 0 \cdot 6 + 1 \cdot (-1) & -2 \cdot (-3) + (-3) \cdot 0 + 0 \cdot (-2) + 1 \cdot 2 \\ 3 \cdot 1 + (-4) \cdot 5 + 2 \cdot 6 + (-1) \cdot (-1) & 3 \cdot (-3) + (-4) \cdot 0 + 2 \cdot (-2) + (-1) \cdot 2 \\ 0 \cdot 1 + 1 \cdot 5 + 6 \cdot 6 + 2 \cdot (-1) & 0 \cdot (-3) + 1 \cdot 0 + 6 \cdot (-2) + 2 \cdot 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -18 & 8 \\ -4 & -15 \\ 39 & -8 \end{pmatrix}$$

Observa que la matriz producto es de orden 3×2.

Propiedades de las operaciones con matrices

Denotaremos por $\mathcal{M}_{m \times n}$ al conjunto formado por todas las matrices de orden $m \times n$. La estructura de este conjunto depende de las propiedades de las operaciones con matrices.

Propiedades del producto de números por matrices

Si $a, b \in \mathbb{R}$ y $A, B \in \mathcal{M}_{m \times n}$, se cumplen las siguientes propiedades.

1. Asociativa: $a\,(bA) = (ab)\,A$

2. Distributiva I: $(a+b)\,A = aA + bA$

3. Distributiva II: $a\,(A+B) = aA + aB$

4. Producto por el número 1: $1A = A$

Propiedades de la suma de matrices
Sean $A, B, C \in \mathcal{M}_{m\times n}$. Entonces se cumplen las siguientes propiedades:

1. Asociativa: $(A+B)+C = A+(B+C)$

2. Conmutativa: $A+B = B+A$

3. Elemento neutro: la matriz $O_{m\times n}$, cuyos elementos son todos 0, sumada con cualquier otra matriz de orden $m \times n$, la deja igual, es decir: $A+O = O+A = A$

4. Elemento opuesto: la opuesta de la matriz A es otra matriz del mismo orden, $-A$, cuyos elementos son los opuestos de los elementos de la matriz A, es decir, si $A = \left(a_{ij}\right)$ entonces $-A = \left(-a_{ij}\right)$. En este caso se cumple que $A+(-A) = A-A = O$; $-A+A = O$, ya que $\left(a_{ij}\right) + \left(-a_{ij}\right) = \left(a_{ij} - a_{ij}\right) = (0) = O$

Propiedades del producto de matrices

1. Asociativa: $\left(A_{m\times n} \cdot B_{n\times p}\right) \cdot C_{p\times q} = A_{m\times n} \cdot \left(B_{n\times p} \cdot C_{p\times q}\right)$

2. El producto de matrices no es conmutativo, es decir, en general el producto $A \cdot B$ no es igual al producto $B \cdot A$ (siempre que ambos productos puedan hacerse) $A \cdot B \neq B \cdot A$.

Propiedades distributivas
Si A, B, C, D son matrices cuyas dimensiones permiten efectuar las operaciones que se indican, se cumplen las siguientes propiedades:

1. $A \cdot (B+C) = A \cdot B + A \cdot C$

2. $(B+C) \cdot D = B \cdot D + C \cdot D$

Matrices cuadradas
Designaremos por $\mathcal{M}_\backslash$ al conjunto de las matrices cuadradas de orden n. Además de poder sumarse y multiplicarse por números, pueden claramente multiplicarse entre sí (si multiplicamos dos matrices de orden n el resultado es otra matriz de orden n). Estas operaciones cumplen todas las propiedades estudiadas hasta ahora. Pero el conjunto $\mathcal{M}_\backslash$ tiene algunas otras peculiaridades.

Matriz identidad o matriz unidad
La matriz identidad o matriz unidad es una matriz diagonal en la que los elementos de la diagonal principal son todos ünos". Se denota por I. Por tanto la matriz identidad de orden n será

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix}_{n\times n}$$

Dada una matriz $A \in \mathcal{M}_\backslash$ se cumple que $A \cdot I_n = I_n \cdot A = A$. En general se escribe $A \cdot I = I \cdot A = A$, suponiendo que A e I son matrices cuadradas del mismo orden. Es esta razón por la que a I se le llama matriz identidad o unidad. Es el elemento neutro para el producto de matrices, como el 1 en el producto de números reales.

Matriz inversa
Dada una matriz $A \in \mathcal{M}_\backslash$, se llama matriz inversa de A, a otra matriz $A^{-1} \in \mathcal{M}_\backslash$, cumpliendo que $A \cdot A^{-1} = I$; $A^{-1} \cdot A = I$. Obsérvese que si la matriz A tiene inversa A^{-1}, entonces al multiplicarlas sí que se cumple la propiedad conmutativa y el resultado es la matriz identidad. Puede comprobarse con facilidad, realizando el producto de ambas, que las dos siguientes matrices son inversas una de la otra.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix},\ A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Cálculo de la inversa de una matriz por el método de Gauss Para hallar la inversa, A^{-1}, de una matriz A, impondremos a la matriz identidad I los mismos cambios a los que hay que someter a la matriz A para obtener la matriz identidad.
En la práctica, se coloca la matriz A, y a su derecha, la matriz I. Se realizan las transformaciones necesarias para que A se transforme en I. Como consecuencia, la matriz que se obtiene a la derecha de I es A^{-1}. Todas las transformaciones que se realicen serán idénticas a las que utilizamos para resolver un sistema de ecuaciones por el método de Gauss. Si, al final del proceso, en la parte de la izquierda aparece una fila de ceros, entonces la matriz A no tiene inversa.
Calculemos por este método, por ejemplo, la matriz inversa de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -6 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -10 & -4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 10 & 10 & 0 & -2 & 6 & 3 \\ 0 & -5 & 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -10 & -4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & -5 & 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -10 & -4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Como se puede apreciar se han realizado cuatro transformaciones. Si a las filas de la matriz las llamamos f_1, f_2 y f_3, las transformaciones realizadas son las siguientes:

- $f_2 - f_1$ y $f_3 - 2f_1$
- $f_3 + 2f_2$
- $-5f_2 + f_3$ y $10f_1 + 3f_3$
- $f_1 + 2f_2$

Finalmente dividimos la primera fila entre 10, la segunda entre -5 y la tercera entre -10, obteniendo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{10} \end{pmatrix}$$

Por tanto la inversa de A es:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{10} \end{pmatrix}$$

Forma matricial de un sistema de ecuaciones Todo sistema de ecuaciones lleva asociado tres matrices: la de los coeficientes, A, la de las incógnitas, X, y la de los términos independientes, que llamaremos C. Por ejemplo, el sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x - 3y + z = 1 \\ x + y - 2z = -2 \\ -3x - y + 3z = 2 \end{array} \right.$$

lleva asociadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ -3 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \; X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Por tanto el sistema se puede expresar matricialmente de la forma:

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ -3 & -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

es decir, $A \cdot X = C$. Si la matriz A tuviera inversa, A^{-1}, podríamos despejar X del siguiente modo: multiplicamos por la izquierda los dos miembros de la igualdad $A \cdot X = C$ por A^{-1}: $A^{-1} \cdot (A \cdot X) = A^{-1} \cdot C$. Aplicando la propiedad asociativa $\left(A^{-1} \cdot A\right) \cdot X = A^{-1} \cdot C$. Entonces $I \cdot X = A^{-1} \cdot C$, con lo que se obtiene $X = A^{-1} \cdot C$.
Si quieres puedes hacer la experiencia con el sistema anterior. Si todo va bien al calcular la matriz incógnita X debes obtener

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Es decir $x = 1$, $y = 1$, $z = 2$.