# Ejercicios de aplicaciones de las derivadas y del teorema del valor medio

Se proponen a continuación varios ejercicios relacionados con las derivadas y sus aplicaciones (por ejemplo, cálculo de extremos, monotonía, cálculo de la imagen de una función, soluciones de ciertas ecuaciones...).
Muchos de estos ejercicios requieren la aplicación del teorema de Rolle y del teorema del valor medio.
Alguno de ellos (el número 12, por ejemplo) es de especial interés, pues haciendo uso del teorema del valor medio se pueden demostrar ciertas desigualdades muy útiles en las matemáticas en general y en el análisis matemático en particular.
Estos ejercicios son de nivel universitario, aunque alguno se podría proponer en bachillerato.
Cada uno de los ejercicios contiene la solución más o menos detallada.

1. Determinar la imagen de las siguientes funciones:

   a) $f:[0,2]\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x^4-8x^3-6x^2+24x+1\,,\forall\,x\in[0,2]$.
   b) $f:[1,2\,\mathrm{e}]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{\ln x}{x}\,,\forall\,x\in[1,2\,\mathrm{e}]$.
   c) $f:[-2,2]\cup\{3\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=1-\sqrt{2|x|-x^2}\,,\forall\,x\in[-2,2]$, $f(3)=2$.

   ***Solución.***

   a) La función $f$ es continua y derivable por ser polinómica. Además $f(0)=1$, $f(2)=9$ y $f'(x)=12x^3-24x^2-12x+24$. También tenemos que $f'(x)=0$ si, y sólo si, $x=-1$, $x=1$ o $x=2$. Esto es equivalente a decir que $f'(x)\neq 0$ si, y sólo si $x\neq-1$, $x\neq 1$ y $x\neq 2$. Luego $f$, salvo en $x=1$, no puede alcanzar ningún extremo relativo en ningún punto del intervalo $[0,2]$. Como $f(1)=14$ y la imagen por una función continua de un intervalo cerrado y acotado es un intervalo cerrado y acotado (propiedad de compacidad), la imagen de $f$ es el intervalo $[1,14]$.
   b) La función es continua y derivable en el intervalo $[1,2\,\mathrm{e}]$ por ser cociente de derivables y no anularse nunca el denominador en dicho intervalo. Por otro lado, $f(1)=0$ y $f(2\,\mathrm{e})=\frac{\ln 2\,\mathrm{e}}{2\,\mathrm{e}}=\frac{\ln 2+1}{2\,\mathrm{e}}\cong 0{,}31$. Además $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$, con lo que $f'(x)=0$ si, y sólo si, $1-\ln x=0\Leftrightarrow x=\mathrm{e}$. Como $f(\mathrm{e})=\frac{1}{\mathrm{e}}\cong 0{,}368$, entonces la imagen de $f$ es el intervalo $\left[0,\frac{1}{\mathrm{e}}\right]=[0,\ 0{,}368]$.
   c) Escribamos de una forma equivalente la función $f$:

$$f(x)=\begin{cases}1-\sqrt{-2x-x^2} & \text{si}\quad -2\leqslant x<0\\ 1-\sqrt{2x-x^2} & \text{si}\quad 0\leqslant x\leqslant 2\\ 2 & \text{si}\quad x=3\end{cases}$$

Claramente $f$ es continua en $[-2,2]$. Observemos además que

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{-\sqrt{2x-x^2}}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{-2x+x^2}{x\sqrt{2x-x^2}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{-2+x}{\sqrt{2x-x^2}}=-\infty$$

Por tanto, $f$ es derivable en $[-2,2]-\{0\}$.De este modo, si $x\in[-2,2]-\{0\}$, se tiene:

$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{x+1}{\sqrt{-2x-x^2}} & \text{si} \quad -2\leqslant x<0\\ \dfrac{x-1}{\sqrt{2x-x^2}} & \text{si} \quad 0<x\leqslant 2\end{cases}$$

Entonces $f'(x)=0$ si, y sólo si, $x=-1$ o $x=1$. Por tanto, los únicos puntos en los que $f$ puede alcanzar un extremo relativo en el intervalo $[-2,2]$ y en los que $f$ sea además derivable son $x=-1$ y $x=1$. Haremos las imágenes de estos últimos, de los extremos del intervalo, de los puntos donde $f$ no es derivable y del punto aislado $x=3$, para decidir la imagen de $f$.

$$f(-2)=1\ ,\ f(-1)=0\ ,\ f(0)=1\ ,\ f(1)=0\ ,\ f(2)=1\ ,\ f(3)=2$$

Por tanto, la imagen de $f$ es $[0,1]\cup\{2\}$

2. Sean $a$ y $b$ números reales con $a<b$. Dar un ejemplo de una función $f:(a,b)\to\mathbb{R}$, no constante, que alcance un máximo relativo en todo punto de $(a,b)$.

   ***Solución.***

$$f(x)=\begin{cases}1 & \text{si} \quad -a<x\leqslant\dfrac{a+b}{2}\\ 2 & \text{si} \quad \dfrac{a+b}{2}<x<b\end{cases}$$

3. Demuéstrese la versión, aparentemente más general, del teorema de Rolle: sea $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ una función derivable en $(a,b)$ y supongamos que $f$ tiene límites en los puntos $a$ y $b$ con $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\lim\limits_{x\to b}f(x)$. Entonces existe un punto $c\in(a,b)$ tal que $f'(c)=0$.

   ***Solución.***

   Sea la función $g:(a.b)\to\mathbb{R}$ definida por

$$g(x)=\begin{cases}\lim\limits_{x\to a}f(x) & \text{si} \quad x=a\\ f(x) & \text{si} \quad a<x<b\\ \lim\limits_{x\to b}f(x) & \text{si} \quad x=b\end{cases}$$

   Es claro que $g$ es continua en $[a,b]$ y derivable en $(a,b)$. Además, por hipótesis $g(a)=g(b)$. Por el teorema de Rolle, existe $c\in(a,b)$ tal que $g'(c)=f'(c)=0$.

4. Sea $I$ un intervalo y $f : I \to \mathbb{R}$ una función derivable en $I$. Sean $x \in I$, $h \in \mathbb{R}^*$ tales que $x+h \in I$. Probar que existe un número $\theta \in (0,1)$ tal que $f(x+h) - f(x) = hf'(x+\theta h)$. Póngase un ejemplo que demuestre que $\theta$ no tiene por qué ser único. Compruébese que en los casos $I = \mathbb{R}$, $f(x) = x^2, \forall\, x \in \mathbb{R}$ y $f(x) = \mathrm{e}^x, \forall\, x \in \mathbb{R}$, ocurre que, fijados $x$ y $h$, el número $\theta$ que aparece sí es único y es independiente de $x$.

   ***Solución.***

   Aplicando el teorema del valor medio al intervalo $[x, x+h]$, se tiene que existe un punto $c \in (x, x+h)$ tal que $f(x+h) - f(x) = f'(c)h$. Como $c \in (x, x+h)$, entonces existe $\theta \in (0,1)$ tal que $c = x + \theta h$ y así $f(x+h) - f(x) = hf'(x+\theta h)$, como queríamos.

   Para probar que $\theta$ no tiene por qué ser único considérese la función $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2$. Entonces $f'(x) = 0, \forall\, x \in [0,1]$ y por tanto dados $x \in [0,1]$, $h \in \mathbb{R}^*$ tales que $x+h \in [0,1]$, es claro que $hf'(x+\theta h) = 0 = f(x+h) - f(x), \forall\, \theta \in (0,1)$.

   Si $I = \mathbb{R}$ y $f(x) = x^2$, existe $\theta \in (0,1)$ tal que $f(x+h) - f(x) = hf'(x+\theta h)$. Pero

   $$f(x+h) - f(x) = x^2 + h^2 + 2xh - x^2 = h^2 + 2xh$$

   $$hf'(x+\theta h) = h2(x+\theta h) = 2xh + 2\theta h^2$$

   Entonces

   $$h^2 + 2xh = 2xh + 2\theta h^2 \Rightarrow h^2 - 2\theta h^2 = 0 \Rightarrow 1 - 2\theta = 0 \Rightarrow \theta = \frac{1}{2}$$

   y por tanto $\theta$ es único.

   Ahora, si $f(x) = \mathrm{e}^x$, entonces:

   $$f(x+h) - f(x) = hf'(x+\theta h) \Leftrightarrow \mathrm{e}^{x+h} - \mathrm{e}^x = h\,\mathrm{e}^{x+\theta h} \Leftrightarrow \mathrm{e}^x(\mathrm{e}^h - 1) = h\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{e}^{\theta h} \Leftrightarrow$$

   $$\Leftrightarrow \mathrm{e}^h - 1 = h\,\mathrm{e}^{\theta h} \Leftrightarrow \ln(e^h - 1) = \ln h + \theta h \Leftrightarrow \theta = \frac{1}{h} \ln \frac{\mathrm{e}^h - 1}{h}$$

   Por tanto, $\theta$ es único.

5. Sea $I$ un intervalo y $f : I \to \mathbb{R}$ una función derivable en $I$. Supongamos que existe un número real positivo $M$ tal que $|f'(x)| \leqslant M, \forall\, x \in I$. Probar que $f$ es uniformemente continua.

   ***Solución.***

   Sean $x, y \in I$, y supongamos $x < y$. Aplicando el teorema del valor medio a la restricción de $f$ al intervalo $[x, y]$, se tiene que $\exists\, c \in (x, y)$ tal que $f(y) - f(x) = f'(c)(x - y)$. Por tanto,

$|f(x) - f(y)| = |f'(c)||x - y| \leqslant M|x - y|$. Entonces, dado un número real y positivo $\varepsilon > 0$ y tomando $\delta = \frac{\varepsilon}{M}$, tenemos:

$$x\,, y \in I\,, |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leqslant M|x - y| < M\frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon$$

con lo que $f$ es uniformemente continua.

6. Sea $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ una función derivable en $\mathbb{R}^+$. Supongamos que $f$ y $f'$ tienen límite en $+\infty$. Probar que $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x) = 0$.

   ***Solución.***

   Sea $x > 0$ y $n \in \mathbb{N}$. Entonces existe $\theta \in (0, 1)$ cumpliendo $f(x + n) - f(x) = f'(x + \theta n)n$, o lo que es lo mismo, $f'(x + \theta n) = \frac{f(x+n) - f(x)}{n}$ (ver ejercicio 4). Sea $\{x_n\} = \{x + \theta n\} \to +\infty$. Por hipótesis $f$ tiene límite en infinito con lo que

   $$\{f'(x + \theta n)\} = \{f'(x_n)\} = \left\{\frac{f(x + n) - f(x)}{n}\right\} \to 0 \Rightarrow \lim_{x \to +\infty} f'(x) = 0$$

   tal y como queríamos demostrar.

7. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua en $[a, b]$ y derivable en $(a, b)$ verificando $f(a) = f(b) = 0$. Probar que para todo real $\lambda$ existe un punto $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = \lambda f(c)$.
   Indicación: considérese la función $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = \mathrm{e}^{-\lambda x} f(x)\,, \forall\, x \in [a, b]$.

   ***Solución.***

   Apliquemos el teorema del valor medio a la función $g$:

   $$\exists\, c \in (a, b) \;:\; g(b) - g(a) = g'(c)(b - a)$$

   O sea:

   $$\mathrm{e}^{-\lambda b} f(b) - \mathrm{e}^{-\lambda a} f(a) = \left(-\lambda\, \mathrm{e}^{-\lambda c} f(c) + \mathrm{e}^{-\lambda c} f'(c)\right)(b - a)$$

   Como $f(a) = f(b) = 0$, entonces:

   $$-\lambda\, \mathrm{e}^{-\lambda c} f(c) + \mathrm{e}^{-\lambda c} f'(c) = 0 \Leftrightarrow \lambda\, \mathrm{e}^{-\lambda c} f(c) = \mathrm{e}^{-\lambda c} f'(c) \Leftrightarrow f'(c) = \lambda f(c)$$

8. Sean $a$, $b$, $c \in \mathbb{R}$ con $a^2 < 3b$. Probar que la ecuación $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ tiene solución real única.

   ***Solución.***

   Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$. Razonando por reducción al absurdo, si existieran $r$, $t \in \mathbb{R}$ $(r < t)$ tales que $f(r) = f(t) = 0$, aplicando el teorema del valor medio al intervalo $[r,t]$ tenemos que existe $s \in (r,t)$ tal que $f'(s) = 0$, es decir, tal que $3s^2 + 2as + b = 0$. Y esto último ocurrirá siempre que el discriminante de la ecuación $3x^2 + 2ax + b = 0$ sea mayor o igual que cero: $4a^2 - 12b \geqslant 0 \Leftrightarrow a^2 \geqslant 3b$, lo cual contradice que $a^2 < 3b$. Por tanto la ecuación $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ tiene solución real única.

9. Determinar el número de raíces de la ecuación $3x^5 + 5x^3 - 30x = m$ según el valor del número $m$.

   ***Solución.***

   Sea $f(x) = 3x^5 + 5x^3 - 30x - m$. Entonces

   $$f'(x) = 15x^4 + 15x^2 - 30 = 15(x^4 + x^2 - 2) = 15(x-1)(x+1)(x^2+2)$$

   De este modo:

   $$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty) \quad ; \quad f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-1, 1)$$

   Esto quiere decir que $f$ es estrictamente creciente en $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ y estrictamente decreciente en $(-1,1)$. Por tanto, $x = -1$ es un máximo relativo y $x = 1$ es un mínimo relativo. Como $f(-1) = 22 - m$ y $f(1) = -22 - m$, y teniendo en cuenta además que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, pueden ocurrir las siguientes situaciones:

   - Si $m < -22$, $f(-1) > 0$ y $f(1) > 0$, con lo que $f$ tiene solo una raíz real situada a la izquierda de $-1$.
   - Si $m = -22$, $f(-1) > 0$ y $f(1) = 0$, con lo que $f$ tiene dos raíces reales, una de ellas en $x = 1$ y otra menor que $-1$.
   - Si $-22 < m < 22$, $f(-1) > 0$ y $f(1) < 0$, con lo que $f$ tiene tres raíces reales, una menor que $-1$, otra situada entre $-1$ y $1$ y la tercera mayor que $1$.
   - Si $m = 22$, $f(-1) = 0$ y $f(1) < 0$, con lo que $f$ tiene dos raíces reales, una de ellas en $x = -1$ y otra mayor que $1$.
   - Si $m > 22$, $f(-1) < 0$ y $f(1) < 0$, con lo que $f$ tiene solo una raíz real situada a la derecha de $1$.

10. Sea $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ derivable y verificando $f(0) = 0$. Supongamos que la función $f'$ es creciente. Probar que la función $g : (0,1] \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = \frac{f(x)}{x}$, $\forall\, x \in (0,1]$ también es creciente.

    ***Solución.***

La función $g$ es creciente en el intervalo $(0,1]$ si, y sólo si, para todo $x \in (0,1]$:

$$\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2} \geqslant 0 \Leftrightarrow xf'(x)-f(x) \geqslant 0$$

Sea $0 < x \leqslant 1$ y apliquemos el teorema del valor medio a la función $f$ en el intervalo $[0,x]$. Existe pues $c \in (0,x)$ tal que:

$$f(x)-f(0)=f'(c)(x-0) \Leftrightarrow f(x)=f'(c)x \leqslant f'(x)x \Leftrightarrow xf'(x)-f(x) \geqslant 0$$

que es justo lo que queríamos demostrar (obsérvese que la penúltima desigualdad se justifica por la hipótesis de que $f'$ es creciente).

11. Sea $f:[0,1] \to \mathbb{R}$ una función derivable, verificando que $f(0)=0$ y $|f'(x)| \leqslant |f(x)|$ para todo $x \in [0,1]$. Probar que $f(x)=0\,,\forall\, x \in [0,1]$.

    ***Solución.***

    Sea $0 < x \leqslant 1$. Aplicando el teorema del valor medio en el intervalo $[0,x]$ tenemos que existe $c \in (0,x)$ tal que $f(x)=f'(c)x$, es decir, tal que $f'(c)=\frac{f(x)}{x}$. Como $0 < x \leqslant 1$, $|f(x)| \leqslant \frac{|f(x)|}{x}$ y entonces, para todo $x \in (0,1]$, existe $c \in (0,1]$ tal que $|f(x)| \leqslant f'(c) \leqslant |f(c)|$. Por tanto, no queda más remedio que $f(x)=0\,,\forall\, x \in [0,1]$.

12. Probar las dobles desigualdades siguientes:

    $$1+x \leqslant \mathrm{e}^x \leqslant 1+x\,\mathrm{e}^x\,,\forall\, x \in \mathbb{R} \quad ; \quad \frac{x}{1+x} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x\,,\forall\, x \in (-1,+\infty)$$

    ***Solución.***

    Sea $f(x)=\mathrm{e}^x$ y $x>0$. Aplicando el teorema del valor medio al intervalo $[0,x]$, existe $c \in (0,x)$ tal que

    $$f(x)-1=f'(c)x \Leftrightarrow \mathrm{e}^x-1=\mathrm{e}^c\,x \Leftrightarrow \mathrm{e}^x=1+\mathrm{e}^c\,x$$

    Por otro lado, como $0<c<x$, entonces, al ser la función exponencial estrictamente creciente tenemos que $\mathrm{e}^0<\mathrm{e}^c<\mathrm{e}^x$, y como $x>0$ tenemos también que

    $$x<x\,\mathrm{e}^c<x\,\mathrm{e}^x \Leftrightarrow 1+x<1+x\,\mathrm{e}^c<1+x\,\mathrm{e}^x \Leftrightarrow 1+x<\mathrm{e}^x<1+x\,\mathrm{e}^x$$

    tal y como queríamos demostrar. Si $x<0$ basta aplicar el teorema del valor medio al intervalo $[x,0]$ y proceder como anteriormente. Si $x=0$, la doble desigualdad es doble igualdad. Por tanto $1+x \leqslant \mathrm{e}^x \leqslant 1+x\,\mathrm{e}^x\,,\forall\, x \in \mathbb{R}$.

Sea ahora $f(x) = \ln(1+x)$ y $x > 0$. Volviendo a aplicar el teorema del valor medio al intervalo $[0,x]$, existe $c \in (0,x)$ tal que $\ln(1+x) = \frac{1}{1+c}x$. Pero:

$$0 < c < x \Leftrightarrow 1 < 1+c < 1+x \Leftrightarrow \frac{1}{1+x} < \frac{1}{1+c} < 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{1+x} < \frac{1}{1+c}x < x \Leftrightarrow \frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x$$

tal y como queríamos demostrar. Si $-1 < x < 0$ se aplica el teorema del valor medio al intervalo $[x,0]$. Si $x = 0$ la doble desigualdad es claramente una doble igualdad. Por tanto, $\frac{x}{1+x} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x\,, \forall\, x \in (-1,+\infty)$.

13. Probar que $x^{\mathrm{e}} \leqslant \mathrm{e}^x\,, \forall\, x \in \mathbb{R}^+$.
Indicación: estudiar la función $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \frac{\ln x}{x}\,, \forall\, x \in \mathbb{R}^+$.

***Solución.***

Derivando la función dada en la indicación tenemos $f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2}$. Entonces:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - \ln x = 0 \Leftrightarrow \ln x = 1 \Leftrightarrow x = \mathrm{e}$$

Por tanto, todo punto de $\mathbb{R}^+$ distinto de e no puede ser extremo relativo. Además, por un lado:

$$f'(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow 1 - \ln x \geqslant 0 \Leftrightarrow \ln x \leqslant 1 \Leftrightarrow x \leqslant \mathrm{e}$$

Y, por otro lado,

$$f'(x) \leqslant 0 \Leftrightarrow 1 - \ln x \leqslant 0 \Leftrightarrow \ln x \geqslant 1 \Leftrightarrow x \geqslant \mathrm{e}$$

Esto quiere decir que la función $f$ alcanza un máximo relativo en el punto $x = \mathrm{e}$, y éste es único (será pues un máximo absoluto). Por tanto, para todo $x \in \mathbb{R}^+$ tenemos:

$$f(x) \leqslant f(\mathrm{e}) \Leftrightarrow \frac{\ln x}{x} \leqslant \frac{1}{\mathrm{e}} \Leftrightarrow \mathrm{e}\ln x \leqslant x \Leftrightarrow \ln x^{\mathrm{e}} \leqslant \ln \mathrm{e}^x \Leftrightarrow x^{\mathrm{e}} \leqslant \mathrm{e}^x$$

tal y como queríamos demostrar.

14. Sea $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ una función derivable en $I = [0,1]$ verificando $f(0) = f'(0) = 0$ y que $f(1) = 1$. Probar que $[0,1] \subset f'(I)$.

***Solución.***

Como $f'(0) = 0$, entonces $0 \in f'(I)$. Aplicando el teorema del valor medio en el intervalo $[0,1]$, existe $c \in (0,1)$ tal que

$$f(1) - f(0) = f'(c)(1-0) \Leftrightarrow f(1) = f'(c) \Leftrightarrow f'(c) = 1$$

De lo anterior se deduce que también $1 \in f'(I)$. Por tanto, al ser $f'(I)$ un intervalo (ver parte v) del teorema 3 del artículo dedicado al teorema del valor medio), todo punto comprendido entre 0 y 1 también pertenece a $f'(I)$. Es decir, $[0,1] \subset f'(I)$.

15. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función derivable en $\mathbb{R}$. Sea $a$ un número real tal que $f'(a) > 0$ y supongamos que $f'$ es continua en $a$. Probar que $f$ es estrictamente creciente en un cierto intervalo abierto de centro $a$.

    ***Solución.***

    Como $f'$ es continua en $a$ y $f'(a) > 0$, utilizando el lema de conservación del signo, existe un número real y positivo $\delta$ tal que si $x$ es cualquier punto de $\mathbb{R}$ verificando $|x - a| < \delta$, se tiene que $f'(x)f'(a) > 0$ ($f'(x)$ tiene el mismo signo que $f'(a)$). Como $f'(a) > 0$, entonces $f'(x) > 0\,, \forall\, x \in (a - \delta, a + \delta)$, es decir, $f$ es estrictamente creciente en un cierto intervalo abierto de centro $a$.

16. Sea $A$ un conjunto no vacío de números reales que no tenga puntos aislados. Probar que si $A$ no es un intervalo existe una función de $A$ en $\mathbb{R}$ derivable con derivada nula en todo punto de $A$ y que no es constante.

    ***Solución.***

    Si $A$ no es un intervalo, existen $a\,, b \in A$ con $a < b$, de forma que $(a, b)$ no está contenido en $A$. Luego existe $c \in (a, b)$ tal que $c \notin A$. Así $A = A_1 \cup A_2$, donde $A_1 = \{a \in A \,:\, a < c\}$ y $A_2 = \{a \in A \,:\, a > c\}$. Tomemos pues

    $$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in A_1 \\ 0 & \text{si} \quad x \in A_2 \end{cases}$$

    Es claro que $f'(x) = 0\,, \forall x \in A$ y $f$ no es constante.

17. Dar un ejemplo de una función $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ derivable en $\mathbb{R}^*$, con $f'(x) \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^*$, que no sea monótona.

    ***Solución.***

    Sea $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2$. Entonces $f'(x) = 2x \neq 0\,, \forall x \in \mathbb{R}^*$. Además, $f$ decrece estrictamente en $(-\infty, 0)$ y crece estrictamente $(0, +\infty)$, luego no es monótona.