Logaritmos: contexto histórico y aplicaciones (IV)

Buscando el error

La corrección sistemática del error no favorece su eliminación. En clase de matemáticas hay que intentar que los alumnos sean los que perciban los errores. Darle lugar al error en la clase es trabajarlo descubriendo las hipótesis falsas que llevaron a producirlo, buscando los posibles caminos hasta redescubrir los conceptos validados y matemáticamente aceptados, comparando versiones correctas con erróneas, etc.

Si el error es descubierto como consecuencia de una interacción o debate entre profesor y alumno, promoverá la superación, puesto que los estudiantes pueden modificar sus viejas ideas cuando están convencidos de que hay otra que es mejor. Veamos una actividad que esconde un error y conlleva a un proceso de reflexión y análisis de lo realizado.

Sabemos que:

$$\frac{1}{2} > \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{1}{2} > \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

Como a un número mayor le corresponde también un logaritmo mayor, tendremos que:

$$\log\frac{1}{2} > \log\left(\frac{1}{2}\right)^2$$

Aplicando la última de las propiedades de los logaritmos vistas en el artículo anterior:

$$\log\frac{1}{2} > 2\cdot\log\frac{1}{2}$$

Si dividimos ambos miembros de la desigualdad por $\log_{10}\frac{1}{2}$ resulta:

$$1 > 2$$

La pregunta es: ¿dónde está el error de este razonamiento? Pues si aceptamos como válido lo realizado, estaríamos contradiciendo el orden que se establece para los números reales.

Una actividad que conduce a un desafío e integra contenidos

Las tablas de logaritmos y las reglas de cálculo (reglas numeradas con multitud de tablas paralelas) eran imprescindibles en cualquier centro de cálculo, hasta la aparición de las calculadoras y ordenadores. Actualmente los logaritmos ya no son necesarios para lo que fueron descubiertos. Sin embargo, ciertas características y utilidades que, durante estos siglos se les han descubierto, los han hecho sobrevivir al desarrollo de la electrónica. Planteamos aquí una actividad que conduce a un desafío e integra contenidos, más si nos proponemos analizarla y reflexionar sobre ella.

¿Qué pasaría si al efectuar un producto, como lo hacíamos anteriormente, alguno de los factores no figura en la tabla porque no es potencia entera de 2, ni de 3, ni de otra base que aparece allí? Supongamos, por ejemplo, que debemos hacer la multiplicación $64\cdot 400$.

En este caso, como el 64 es una potencia de 2 (también lo es de 4 en la tabla mostrada anteriormente) podríamos expresar al 400 como una potencia en la misma base. Como 400 es un valor comprendido entre 256 y 512, entonces es una potencia de 2 comprendida entre 2^8 y 2^9, y el exponente que estaríamos buscando debiera ser un número comprendido entre 8 y 9. Si contáramos con una calculadora científica, o un software adecuado, hallaríamos que el exponente buscado se obtiene de calcular:

$$2^n = 400 \Rightarrow \log 2^n = \log 400 \Rightarrow n \cdot \log 2 = \log 400 \Rightarrow n = \frac{\log 400}{\log 2} \cong 8,64385619$$

Ahora bien, pensemos por un instante que no disponemos ni de calculadora ni de software, y que muy "ligeramente" llevamos a cabo un proceso de interpolación lineal para efectuar el cálculo. No obstante, somos conscientes de que este procedimiento nos conducirá a encontrar una aproximación a dicho exponente. El razonamiento sería así:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & \text{Potencias} & & \text{Exponentes} & & \\
 & & 256 & \text{———} & 8 & & \\
 & 144 & & & & n-8 & \\
 & & 400 & \text{———} & n & & \\
256 & & & & & & 1 \\
 & & 512 & \text{———} & 9 & &
\end{array}$$

Esto es, si a una diferencia de 256 entre las potencias ($512-256$) le corresponde una diferencia de 1 ($9-8$) entre los exponentes, entonces a una diferencia de 144 ($400-256$) le corresponderá una diferencia $n-8$. Una simple regla de tres nos lleva a $n-8=\frac{144}{256}=0,5625$, por lo que el exponente buscado es $n=8+0,5625=8,5625$. Logramos, de esta forma, que nuestra multiplicación se transforme en:

$$64 \cdot 400 = 2^6 \cdot 2^n = 2^6 \cdot 2^{8,5625} = 2^{14,5625}$$

Hay que hacer notar que la aproximación $2^{8,5625} \cong 378,0674934$ al 400 deviene, sencillamente, porque hemos calculado el exponente pensando en una variación proporcional (lineal) entre los números. De hecho, hemos aplicado una "regla de tres simple", cuando en realidad la variación es exponencial.

Con una calculadora científica tendríamos que $2^{14,5625} \cong 24196,31958$. Pero como se supone que no disponemos de ella, nos vemos nuevamente tentados a realizar otra interpolación lineal. En este caso tendríamos:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & \text{Potencias} & & \text{Exponentes} & & \\
 & & 16384 & \text{———} & 14 & & \\
 & x-16384 & & & & 0,5625 & \\
 & & x & \text{———} & 14,5625 & & \\
16384 & & & & & & 1 \\
 & & 32768 & \text{———} & 15 & &
\end{array}$$

Armando convenientemente la proporción y resolviendo resulta:

$$x-16384 = \frac{16384 \cdot 0,5625}{1} = 9216 \Rightarrow x = 16384 + 9216 \Rightarrow x = 25600$$

Sintetizando lo realizado hasta el momento tenemos:

$$64 \cdot 400 = 2^6 \cdot 2^n \cong 2^6 \cdot 2^{8,5625} = 2^{14,5625} \cong 25600$$

Pero es que, ¡efectivamente $64 \cdot 400 = 25600$!, muy a pesar de que el resultado se obtuvo tras sucesivas aproximaciones lineales. Naturalmente surge como interrogante: ¿por qué ocurre esto?, y allí está el desafío que se le propone al lector.

Cabe hacer notar que esta situación no sólo se presenta en el ejemplo propuesto. Tampoco es generalizable a cualquier producto. Sí, por ejemplo, se presenta cuando uno de los factores puede ser expresado como una potencia de base natural y exponente entero, y el otro no.