Logaritmos: contexto histórico y aplicaciones (II)

Retomando la idea original de Napier, que motivara el surgimiento de los logaritmos, abordaremos el asunto de un modo similar, aunque mucho más simplificado. Podríamos comenzar calculando, como lo hacemos habitualmente y sin ayuda de la calculadora, las siguientes multiplicaciones:

$$16\cdot 512 \;\; ; \;\; 81\cdot 19683 \;\; ; \;\; 256\cdot 262144 \;\; ; \;\; 625\cdot 1953125$$

Tendríamos que aplicar en cada caso el conocido, desde pequeños, algoritmo de la multiplicación. Algoritmo que por cierto utilizaban en la época de Napier por la inexistencia de calculadoras. Por ejemplo:

$$\begin{array}{r} 2\,6\,2\,1\,4\,4 \\ \times\;\; 2\,5\,6 \\ \hline 1\,5\,7\,2\,8\,6\,4 \\ 1\,3\,1\,0\,7\,2\,0 \\ 5\,2\,4\,2\,8\,8 \\ \hline 6\,7\,1\,0\,8\,8\,6\,4 \end{array}$$

Procediendo así con los demás productos tendríamos:

$$16\cdot 512 = 8192 \;\; ; \;\; 81\cdot 19683 = 1594323 \;\; ; \;\; 256\cdot 262144 = 67108864 \;\; ; \;\; 625\cdot 1953125 = 1220703125$$

Ahora bien, podríamos construir una tabla que contenga algunas potencias de base y exponente natural, como la que aparece a continuación, y localizar en ella cada uno de los resultados obtenidos.

n	2^n	3^n	4^n	5^n
1	2	3	4	5
2	4	9	16	25
3	8	27	64	125
4	16	81	256	625
5	32	243	1024	3125
6	64	729	4096	15625
7	128	2187	16384	78125
8	256	6561	65536	390625
9	512	19683	262144	1953125
10	1024	59049	1048576	9765625
11	2048	177147	4194304	48828125
12	4096	531441	16777216	244140625
13	**8192**	**1594323**	**67108864**	**1220703125**
14	16384	4782969	268435456	6103515625

Vemos que todos los resultados conseguidos se ubican en la fila correspondiente a $n = 13$. Es decir, que 13 es el exponente al que hay que elevar el 2 para obtener 8192, o el 3 para obtener 1594323, o el 4 para obtener 67108864, o el 5 para obtener 1220703125.

Este exponente, en matemáticas, se denomina ***logaritmo***. En particular diríamos que el logaritmo de 8192, en base 2, es 13 y escribimos:

$$\log_2 8192 = 13 \text{, ya que } 2^{13} = 8192$$

o que el logaritmo de 1594323 en base 3 es 13 y lo denotamos:

$$\log_3 1594323 = 13 \text{, ya que } 3^{13} = 1594323$$

Y así sucesivamente. No obstante, volveremos sobre este concepto para terminar de comprenderlo.

Ubicamos ahora en la tabla cada uno de los factores correspondientes a las multiplicaciones planteadas al inicio de la actividad y tratamos de expresarlos como potencias con igual base. Por ejemplo:

$$16 \cdot 512 = 8192$$

$$2^4 \cdot 2^9 = 2^{13}$$

Hemos tomado este ejemplo en particular, pero es fácil comprobar que las restantes multiplicaciones involucran los mismos exponentes.

Tal como pudimos constatar, el cálculo de las multiplicaciones propuestas con la actividad se vuelve más largo y engorroso, a medida que aumenta el número de dígitos de los factores. Si en cambio expresamos a cada uno de los factores como potencias de igual base, las cuales podemos encontrar en una tabla similar a la anterior, y utilizamos propiedades ya conocidas por nosotros, el cálculo puede tornarse mucho más sencillo.

Por ejemplo, $16 \cdot 512$ puede resolverse, sin efectuar el algoritmo de la multiplicación, utilizando sólo la tabla expuesta, de la siguiente manera, donde hemos utilizado las conocidas propiedades de las potencias:

$$16 = 2^4 \text{ y } 512 = 2^9 \text{, por lo que } 16 \cdot 512 = 2^4 \cdot 2^9 = 2^{13}$$

Buscamos ahora en la tabla, en la columna correspondiente a 2^n, su valor para $n = 13$. El mismo es 8192, coincidentemente con el valor que encontráramos cuando resolvimos la multiplicación mediante el algoritmo habitual.

Del mismo modo podemos hacer:

$$81 \cdot 19683 = 3^4 \cdot 3^9 = 3^{13} = 1594323$$

$$256 \cdot 262144 = 4^4 \cdot 4^9 = 4^{13} = 67108864$$

$$625 \cdot 1953125 = 5^4 \cdot 5^9 = 5^{13} = 1220703125$$

De manera similar, podríamos efectuar otras operaciones, por ejemplo divisiones:

$$\frac{67108864}{263144} = \frac{4^{13}}{4^9} = 4^4 = 256$$

$$\frac{1220703125}{625} = \frac{5^{13}}{5^4} = 5^9 = 1953125$$

También podríamos verificar otras propiedades de las potencias:

$$4^7 = 16384 = 2^{14} \Rightarrow 4^7 = 2^{14} \Rightarrow \left(2^2\right)^7 = 2^{14}$$

Hemos visto otra vez que las multiplicaciones se pueden convertir en sumas y las divisiones en restas, con lo que se facilita notablemente el cálculo, más cuando los números implicados son muy grandes y se cuenta, naturalmente, con las tablas apropiadas. Hoy día no tendría sentido realizarlas de esta manera, pero el concepto que vino a originar la búsqueda de la simplicidad en los cálculos trasciende la utilidad que tuvo en su época. De hecho, vamos a ver algunos de estos aspectos a continuación.

Una propiedad que suscita errores

Para muchas personas es simplemente una convención el hecho de que una potencia con base no nula y exponente cero dé como resultado uno: si $a \neq 0 \Rightarrow a^0 = 1$. Pero, a veces, no siempre se recuerda esta regla "instituida" en algún momento de la formación matemática. Y puede ocurrir que, cuando se pregunta por ella, el alumnado eche mano de justificaciones que guardan cierto grado de coherencia interna con el razonamiento seguido, como el considerar que $a^0 = 0$ pues *"se multiplica cero veces la base"*, o que $a^0 = a$ puesto que *"si se multiplica cero veces la base, queda la misma base"*, pero que son inconsistentes para las leyes y propiedades establecidas para los números enteros.

Observemos que las tablas propuestas anteriormente para abordar el concepto de logaritmo nos brindan una oportunidad más para reforzar esta dificultad que presentan los alumnos aún en niveles superiores, pues aparece una serie de potencias donde podemos ver claramente la ley de formación que subyace en ella.

Para ello recordemos una par de conceptos. Una serie o sucesión de números recibe el nombre de ***aritmética*** si cada número se obtiene del anterior sumándole siempre el mismo número (llamado ***diferencia***). Una serie de números recibe el nombre de ***geométrica*** si cada término se obtiene del anterior multiplicándolo siempre por el mismo número, que recibe el nombre de ***razón***.

Tomemos, por ejemplo, la serie de potencias de base igual a 2, 2^n:

Exponentes	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**...**
	$\times 2$	$\times 2$	$\times 2$	$\times 2$	$\times 2$	$\times 2$	
Resultados	**¿?**	**2**	**4**	**8**	**16**	**32**	**...**
	$\div 2$	$\div 2$	$\div 2$	$\div 2$	$\div 2$	$\div 2$	

Los resultados siguen una serie geométrica de razón 2 y los exponentes conforman una serie aritmética cuya diferencia es 1. ¿Qué valor asignar a 2^0? Puesto que se multiplica por 2 cada término para obtener el siguiente, o equivalentemente, se divide entre 2 cada uno de ellos para conseguir el anterior, para que la serie tenga sentido no queda otra alternativa que asignar el valor 1 para el primer resultado, o sea, $2^0 = 1$.

Una leyenda que se relaciona con el tema

En el siglo IX, se escribieron en Arabia los primeros libros sobre el juego del ajedrez, cuyos autores fueron: Al-Razí, Al-Sarajsí y Al-Adlí. Este último escribió *"El Libro del Ajedrez"* en el que se narra por vez primera, la célebre leyenda de los granos de trigo, donde se le atribuye la invención del Ajedrez a alguien llamado Sissa.

La Historia cuenta que Sissa inventó este juego con el objeto de agradar al rey y combatir su tedio, mostrándole además que un rey sin su pueblo está inerme, pues no tiene poder ni valor. Fascinado con el juego, el rey le ofreció a Sissa cumplirle un deseo. No obstante, Sissa decidió darle al rey una lección de humildad, y pidió lo siguiente: dos granos de trigo por la primera casilla del tablero, cuatro granos por la segunda, ocho por la tercera, dieciséis por la cuarta, y así sucesivamente hasta completar las sesenta y cuatro casillas. Digamos, estaríamos continuando con la serie de potencias de base 2 que iniciamos anteriormente.

El rey, extrañado de que alguien con tanta inteligencia pidiera algo en apariencia tan simple, ordenó que se le concediera su petición. Al poco tiempo, su visir le indicó que era imposible satisfacer la demanda, pues la cantidad de trigo que pedía Sissa era muchísimo más de lo que ellos podrían llegar a tener.

Surge naturalmente como interrogante: ¿qué cantidad de granos de trigo le debía entregar el rey? Solamente expresar que tal cantidad de granos de trigo es imposible juntarla de un solo golpe, aún recolectando todas las cosechas de trigo del mundo durante un siglo. Otra cuestión: si contáramos de tal cantidad un grano de trigo por segundo, sin parar, ¿cuánto tardaríamos? Muy posiblemente deberíamos hacer cambios de unidades en la magnitud tiempo para que nuestra respuesta adquiriera sentido.

A su vez, podríamos también cuestionarnos cuánto pesaría esta carga de trigo. Desde luego, tendríamos que hacer algunas experiencias previas para determinar el peso aproximado de un grano de trigo, e indagar la capacidad máxima de carga de un camión de transporte de granos, siempre que nuestra intención esté en brindar una respuesta medianamente aceptable al interrogante.

Asimismo, valdría la pena hallar la cotización internacional promedio del trigo, por toneladas, al cierre de la bolsa de valores y estimar el costo de esta cantidad de cereal. Con seguridad, habrá que hacer algunas conversiones de moneda y nos llevaría a realizar incursiones por el mundo financiero.

Pero si nuestra curiosidad y capacidad de asombro desea continuar, podríamos considerar la posibilidad de colocar los granos de trigo uno tras otro. Ahora bien, deberíamos también estimar el largo de un grano de trigo, y entonces cabe preguntamos: ¿cómo de larga sería nuestra hilera? ¿De un kilómetro? ¿De mil kilómetros? ¿Llegaríamos al otro lado del mundo? ¿Podríamos darle una vuelta a la tierra?

Cuestiones

1. ¿Cuántos granos de trigo había que entregarle a Sissa?
2. Si contamos un grano de trigo por segundo, ¿cuánto tiempo se tardaría en contar todos los granos de trigo? Expresa el resultado en años.
3. Si en un kilogramo de trigo hay aproximadamente 1200 granos, ¿cuánto pesan todos los granos de trigo?
4. Si la longitud de un grano de trigo es de 8 milímetros, ¿cómo de larga sería la hilera formada por todos los granos de trigo?