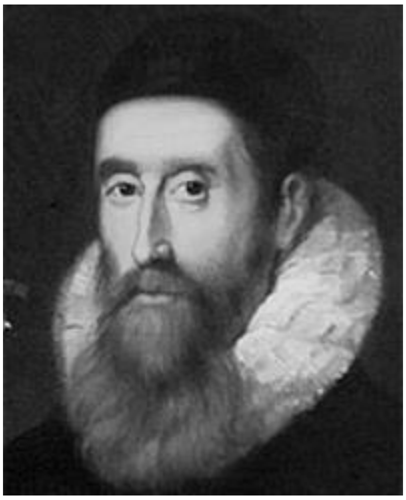
Logaritmos: contexto histórico y aplicaciones (I)

Los logaritmos irrumpen en la historia de la humanidad hace casi 400 años y fueron utilizados durante casi 350 años como la principal herramienta en los cálculos aritméticos. Un increíble esfuerzo se ahorró usándolos, pues permitieron trabajar con los pesados cálculos necesarios en los problemas de agrimensura, astronomía, y particularmente en las aplicaciones a la navegación.

Merced a estos números, las multiplicaciones pudieron sustituirse por sumas, las divisiones por restas, las potencias por productos y las raíces por divisiones, lo que no sólo simplificó enormemente la realización manual de los cálculos matemáticos, sino que permitió realizar otros que sin su invención no hubieran sido posibles.

Si bien Napier fue uno de los que impulsó fuertemente su desarrollo, y por tal razón es considerado el inventor de los logaritmos, muchos otros matemáticos de la época también trabajaron con ellos.



John Napier

John Napier nació en 1550 en el castillo de Merchiston, en Edimburgo (Escocia) y allí fallece el 4 de abril de 1617. Perteneció a una familia noble de gran riqueza y los historiadores cuentan que estuvo dedicado a cuidar de sus propiedades, transformando su castillo en residencia para científicos y artistas, lo que llevó a que usara su gran fortuna para mantener e invitar a inventores, matemáticos, astrónomos, poetas, pintores, etc. Se lo define como un terrateniente escocés (estudió Matemática sólo como un hobby) de la baja nobleza (barón) y que estaba particularmente interesado en la medición de fincas, donde a grandes números se le pueden hacer corresponder graves errores y perjuicios. Es de destacar que en su época, la forma de operar con grandes números era confusa y compleja.

Hacia el año 1594, Napier estudió las sucesiones de las potencias de un número (a^0, a^1, a^2, …, a^n,…) y conocía que los productos y cocientes de dos términos con la misma base son iguales a las potencias de las sumas o diferencias de los exponentes de los mismos. Ya conoces estas dos propiedades de las potencias:

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m} \quad ; \quad \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

Pero estas sucesiones de potencias no resultaban útiles para el cálculo porque entre dos potencias sucesivas había un “hueco” muy grande y la interpolación que había que hacer era muy imprecisa. Por ejemplo, la sucesión de potencias de base dos es:

$$2^0 = 1 \ , \ 2^1 = 2 \ , \ 2^2 = 4 \ , \ 2^3 = 8 \ , \ 2^4 = 16 \ , \ 2^5 = 32 \ ,\dots , \ 2^{10} = 1024 \ ,\dots , \ 2^{30} = 1073741824 \ ,\dots$$

Cada vez que vamos aumentando el exponente, el hueco existente entre los resultados es cada vez mayor.

John Napier se dio cuenta de que si pudiéramos expresar todos los números como potencias de un número base, la multiplicación se reduciría, simplemente a sumar exponentes y la división a restarlos. Observa la siguiente tabla en la que se dan los catorce primeros términos de la sucesión anterior. La primera fila corresponde a los exponentes y la segunda fila a los resultados de elevar a dos cada uno de ellos:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048	4096	8192

Veamos ahora cómo funciona la idea de Napier. Al multiplicar $64 \cdot 128$ hemos de utilizar el conocido algoritmo de la multiplicación, obteniendo como resultado 8192. Napier pensó que como al 64 le corresponde el exponente 6 y al 128 el exponente 7, sería más fácil realizar la suma $6+7=13$ y luego volver a mirar en la tabla el número que le corresponde al 13, que es el 8192. Con una tabla suficientemente completa se podrían transformar largas multiplicaciones y divisiones en sencillas sumas y restas.

Ahora bien, no valía la pena inventar los logaritmos para hacer cuentas simplemente entre números enteros. Lo interesante sería tener una tabla con números que tuvieran cifras decimales, es decir, fracciones. El objetivo principal estaba en hacer más fáciles las cuentas largas y complicadas, y para ello se tendrían que expresar como potencias los números fraccionarios situados entre dos enteros consecutivos.

Para lograrlo, había una manera: usar potencias fraccionarias, pero las potencias fraccionarias (que ahora conocemos: los radicales) no eran bien conocidas aún en la época de Napier. Así por ejemplo, la pregunta sería: ¿qué número decimal ha de ser x en la primera fila de la tabla para que en la segunda le corresponda el $5{,}6$? O lo que es lo mismo: ¿quién ha de ser x para que $2^x = 5{,}6$? Es evidente que tendría que ser un número entre 2 y 3, ya que $2^2 = 4$ y $2^3 = 8$ pero… ¿cuál?

Napier buscó otro camino. Este camino consistía en cambiar la base. Si la base es dos, las potencias crecen muy deprisa. Napier intentó buscar una base cuyas potencias crecieran razonablemente despacio como para ir cubriendo los baches entre los números enteros, pero no tan despacio como para que los exponentes se hicieran enormes y otra vez el sistema fuera engorroso. Napier llegó a la conclusión de que un número cercano a uno, pero no demasiado cercano podía ser una base razonable. No vamos a explicar aquí a qué elección más o menos precisa llegó, pero sí diremos que la misma tenía que ver con lo engorrosos cálculos que en su época se hacían especialmente en trigonometría, y que durante veinte años (desde 1594 a 1614) se dedicó a hacer una tabla obteniendo exponenciales de diversas funciones trigonométricas, ya que se empleaban mucho en cálculos astronómicos.

Lo cierto es que, una vez que terminó con las cuentas, decidió que había que ponerles un nombre a lo que estaba haciendo. El proceso de cálculo hizo que llamara a esos números "logaritmos" que quiere decir "números proporcionados". Precisamente el vocablo logaritmo está formado por las palabras griegas $\lambda o \gamma o \varsigma$ (logos), que significa *razón* o *cociente*, y $\alpha \rho \iota \theta \mu o \varsigma$ (arithmos), con el significado de *número*, y se define, literalmente, como *un número que indica una relación o proporción*. Es decir, alude a la proposición que fue hecha por Napier en su teorema fundamental, el cual establece que la diferencia de dos logaritmos determina la relación de los números a los cuales corresponden, de manera que, una serie aritmética de logaritmos corresponde a una serie geométrica de números.

Así, de la misma forma que 8 es la potencia en base 2 de 3, 3 es el logaritmo en base 2 de 8. La notación actual es así:

$$\log_2 8 = 3 \Leftrightarrow 2^3 = 8$$

En general:

$$\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$$

Si bien ya Arquímedes utilizaba la idea de reducir la multiplicación de dos números por medio de la suma de sus logaritmos, el verdadero auge de los mismos, como herramienta de cálculo, comienza en el siglo XVI con Stifel, se consolida a inicios del siglo XVII con Napier y Bürghi, y posteriormente con la construcción de las primeras tablas de logaritmos en base 10, realizadas por Briggs.