1. En una base ortonormal las coordenadas de un vector son $\vec{v}(2,\,-5)$. Halla las coordenadas de $\vec{v}$ en la base $B=\{(1,\,-1),\,(0,\,-1)\}$.
2. Si las coordenadas de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son $(3,\,-5)$ y $(-2,\,1)$, obtén las coordenadas de:

   a) $-2\vec{u}+\frac{1}{2}\vec{v}$; b) $-\vec{u}-\frac{3}{5}\vec{v}$; c) $\frac{1}{2}(\vec{u}+\vec{v})-\frac{2}{3}(\vec{u}-\vec{v})$
3. Halla el vector $\vec{b}$ tal que $\vec{c}=3\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}$, siendo $\vec{a}(-1,\,3)$ y $\vec{c}(7,\,-2)$.
4. Dados los vectores $\vec{a}(3,\,-2)$, $\vec{b}(-1,\,2)$ y $\vec{c}(0,\,-5)$, calcula m y n de modo que $\vec{c}=m\vec{a}+n\vec{b}$.
5. Expresa el vector $\vec{a}(-1,\,-8)$ como combinación lineal de $\vec{b}(3,\,-2)$ y $\vec{c}\left(4,\,-\frac{1}{2}\right)$.
6. ¿Cuáles de los siguientes pares de vectores forman una base?

   a) $\vec{u}(3,\,-1)$, $\vec{v}(1,\,3)$; b) $\vec{u}(2,\,6)$, $\vec{v}\left(\frac{2}{3},\,2\right)$
7. En una circunferencia de centro O y de radio 2 cm, se inscribe un hexágono de vértices A, B, C, D, E, F. Calcula los productos siguientes:

   a) $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$; b) $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}$; c) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{ED}$; d) $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{EF}$
8. Dados los vectores $\vec{x}(5,\,-2)$, $\vec{y}(0,\,3)$, $\vec{z}(-1,\,4)$, calcula:

   a) $\vec{x}\cdot\vec{y}$; b) $\vec{x}\cdot\vec{z}$; c) $\vec{y}\cdot\vec{z}$
9. Calcula k para que el producto $\vec{u}\cdot\vec{v}$ sea igual a 0 en los siguientes casos:

   a) $\vec{u}(6,\,k)$, $\vec{v}(-1,\,3)$; b) $\vec{u}\left(\frac{1}{5},\,-2\right)$, $\vec{v}(k,\,3)$; c) $\vec{u}(-3,\,-2)$, $\vec{v}(5,\,k)$
10. Dados $\vec{u}(2,\,3)$, $\vec{v}(-3,\,1)$ y $\vec{w}(5,\,2)$, calcula:

    a) $(3\vec{u}+2\vec{v})\cdot\vec{w}$; b) $\vec{u}\cdot\vec{v}-\vec{v}\cdot\vec{w}$; c) $(\vec{u}\cdot\vec{v})\vec{w}$; d) $\vec{u}(\vec{v}\cdot\vec{v})$
11. Halla el módulo de cada uno de los siguientes vectores:

    a) $\vec{u}(3,\,2)$; b) $\vec{v}(-2,\,3)$; c) $\vec{w}(-8,\,-6)$; d) $\vec{z}\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; e) $\vec{t}(5,\,0)$; f) $\vec{r}(1,\,1)$
12. Halla el valor de m para que el módulo del vector $\vec{u}\left(\frac{3}{5},\,m\right)$ sea igual a 1.
13. Calcula x, de modo que el producto escalar de $\vec{a}(3,\,-5)$ y $\vec{b}(x,\,2)$ sea igual a 7. ¿Qué ángulo forman los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$?
14. Halla el ángulo que forman los siguientes pares de vectores:

    a) $\vec{u}(3,\,2)$, $\vec{v}(1,\,-5)$; b) $\vec{m}(4,\,6)$, $\vec{n}(3,\,-2)$; c) $\vec{a}(1,\,6)$, $\vec{b}\left(-\frac{1}{2},\,-3\right)$
15. Dado el vector $\vec{u}(-5,\,k)$ calcula k de modo que:
    a) $\vec{u}$ sea ortogonal a $\vec{v}(4,\,-2)$.
    b) El módulo de $\vec{u}$ sea igual a $\sqrt{34}$
16. Dado el vector $\vec{u}(5,\,12)$, determina:
    a) Los vectores unitarios (módulo 1) de la misma dirección que $\vec{u}$.
    b) Los vectores ortogonales a $\vec{u}$ que tenga el mismo módulo que $\vec{u}$.
    c) Los vectores unitarios y ortogonales a $\vec{u}$.

17. Halla las coordenadas de un vector $\vec{v}(x,\ y)$, ortogonal a $\vec{u}(3,\ 4)$ y que mida el doble de $\vec{u}$.
18. Dados $\vec{a}(2,1)$ y $\vec{b}(6,\ 2)$, halla un vector $\vec{v}$ tal que $\vec{v}\cdot\vec{a}=1$ y $\vec{v}\perp\vec{b}$.
19. Siendo $\vec{u}(5,\ -b)$ y $\vec{v}(a,\ 2)$, halla a y b, sabiendo que $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son ortogonales y que $|\vec{v}|=\sqrt{13}$.
20. Dados los vectores $\vec{a}=2\vec{u}-\vec{v}$ y $\vec{b}=-3\vec{u}+k\vec{v}$, siendo $\vec{u}=(2,\ 3)$ y $\vec{v}=(-3,\ 0)$, halla k de modo que $\vec{a}+\vec{b}$ sea ortogonal a $\vec{a}-\vec{b}$.
21. Halla el valor que debe tener k para que los vectores $\vec{x}=k\vec{a}+\vec{b}$ e $\vec{y}=k\vec{a}-\vec{b}$ sean perpendiculares, siendo $\vec{a}\left(\frac{3}{2},\ 4\right)$ y $\vec{b}(5,\ 0)$.
22. Dados los vectores $\vec{u}(k,\ -6)$ y $\vec{v}(3,\ h)$, calcula k y h de modo que $|\vec{u}|=10$ y $\vec{u}\perp\vec{v}$.
23. Calcula las coordenadas de un vector $\vec{u}$ tal que $|\vec{u}|=1$ y $\vec{u}\cdot\vec{v}=1$ siendo $\vec{v}(2,1)$.
24. De los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ sabemos que $|\vec{a}|=3$ y $|\vec{b}|=5$, y que forman un ángulo de 120°. Calcula $|\vec{a}-\vec{b}|$.
25. Si $|\vec{u}|=3$ y $(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v})=-11$, halla $|\vec{v}|$.
26. Sabiendo que $|\vec{u}|=3$, $|\vec{v}|=5$ y $\vec{u}\perp\vec{v}$, halla $|\vec{u}+\vec{v}|$ y $|\vec{u}-\vec{v}|$.
27. Sea $B=\{\vec{x},\ \vec{y}\}$ una base ortonormal. Calcula $|\vec{x}+\vec{y}|$ y $|\vec{x}-\vec{y}|$.
28. Si $|\vec{u}|=4$, $|\vec{v}|=3$ y $|\vec{u}+\vec{v}|=5$, ¿qué ángulo forman $\vec{u}$ y $\vec{v}$?
29. Calcula x para que los vectores $\vec{a}(7,1)$ y $\vec{b}(1,\ x)$ formen un ángulo de 45°.
30. Halla un vector $\vec{a}$ que forme un ángulo de 60° con el vector $\vec{b}\left(2,\ 2\sqrt{3}\right)$ y tenga como módulo la mitad del módulo de $\vec{b}$.
31. Determina un vector $\vec{a}$ que forme con $\vec{b}(-1,\ -2)$ un ángulo de 30° y tal que $|\vec{a}|=\sqrt{3}\,|\vec{b}|$.
32. Dados los vectores $\vec{u}(1,\ 3)$ y $\vec{v}(6,\ 4)$, halla la proyección de $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$.
33. Dado el vector $\vec{u}=(-3,6)$, determina el módulo del producto escalar de $\vec{u}$ por $\vec{v}$, si sabemos que la proyección de $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$ es 3.
34. Dados $\vec{a}(2x,5)$ y $\vec{b}(7,y)$, averigua los valores de x e y sabiendo que $\vec{a}$ se encuentra en el primer cuadrante, $|\vec{a}|=5\sqrt{5}$, y los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son perpendiculares.
35. Calcular el punto A', simétrico del punto $A(2,3)$ respecto de otro punto, $P(1,3)$.
36. Dado el triángulo cuyos vértices son $A(-1,0)$, $B(3,3)$ y $C(1,-2)$, calcula:
    a) La longitud del lado AB.
    b) La longitud del lado AC.
    c) El ángulo correspondiente al vértice A.
    d) El área del triángulo.
37. Dado el triángulo de vértices $A(-3,7)$, $B(5,6)$ y $C(-2,15)$, calcula el valor de su área y el ángulo que corresponde al vértice A.
38. Determina el valor de z para que los vectores $\vec{u}=(z,-3)$ y $\vec{v}=(1.-2)$:
    a) Sean paralelos.
    b) Sean perpendiculares.
    c) Formen un ángulo de $\pi/4$ rad.
    d) Formen un ángulo de $\pi/3$ rad.

Soluciones

1. Las coordenadas de $\vec{v}$ respecto de la base $B=\{(1,\ -1),\ (0,\ -1)\}$ son $(2,3)$
2. a) $\left(-7,\dfrac{21}{2}\right)$; b) $\left(-\dfrac{9}{5},8\right)$; c) $\left(-\dfrac{17}{6},2\right)$
3. $\vec{b}\,(-20,22)$
4. $m=-\dfrac{5}{4}$; $n=-\dfrac{15}{4}$
5. $\vec{a}=5\vec{b}-4\vec{c}$
6. a) Sí forman una base ; b) No forman una base
7. a) $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=2$; b) $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}=-2$; c) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{ED}=2$; d) $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{EF}=-4$
8. a) $\vec{x}\cdot\vec{y}=-6$; b) $\vec{x}\cdot\vec{z}=-13$; c) $\vec{y}\cdot\vec{z}=12$
9. a) $k=2$; b) $k=30$; c) $k=-\dfrac{15}{2}$
10. a) 22 ; b) 29 ; c) $(15,-6)$; d) $(20,30)$
11. a) $\sqrt{13}$; b) $\sqrt{13}$; c) 10 ; d) 1 ; e) 5 ; f) $\sqrt{2}$
12. $m=\dfrac{4}{5}$
13. $x=\dfrac{17}{3}$. El ángulo que forman los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ es de $78,463^{\circ}$
14. a) $112,33^{\circ}$; b) 90° ; c) 180°
15. a) $k=-10$; b) $k=\pm 3$
16. a) $\vec{v}_1=\left(\dfrac{5}{13},\dfrac{12}{13}\right)$, $\vec{v}_2=\left(-\dfrac{5}{13},-\dfrac{12}{13}\right)$; b) $\vec{v}_1=(-12,5)$, $\vec{v}_2=(12,-5)$; c) $\vec{v}_1=\left(-\dfrac{12}{13},\dfrac{5}{13}\right)$, $\vec{v}_1=\left(\dfrac{12}{13},-\dfrac{5}{13}\right)$
17. $\vec{v}\,(8,-6)$
18. $\vec{v}\,(-1,3)$
19. Hay dos parejas de soluciones: $\begin{cases} a=3 \\ b=\dfrac{15}{2}\end{cases}$; $\begin{cases} a=-3 \\ b=-\dfrac{15}{2}\end{cases}$
20. Hay dos posibles soluciones: $k_1=-\dfrac{4}{3}$ y $k_2=-\dfrac{8}{3}$
21. $k=\pm\dfrac{10\sqrt{73}}{73}$
22. Hay dos parejas de soluciones: $\begin{cases} k=8 \\ h=4\end{cases}$; $\begin{cases} k=-8 \\ h=-4\end{cases}$

23. Hay dos parejas de soluciones: $\begin{cases} a=0 \\ b=1 \end{cases}$; $\begin{cases} a=\dfrac{4}{5} \\ b=-\dfrac{3}{5} \end{cases}$

24. $\left|\vec{a}-\vec{b}\right|=7$

25. $\left|\vec{v}\right|=\sqrt{20}$

26. $\left|\vec{u}+\vec{v}\right|=\sqrt{34}$; $\left|\vec{u}-\vec{v}\right|=\sqrt{34}$

27. $\left|\vec{x}+\vec{y}\right|=\sqrt{2}$; $\left|\vec{x}-\vec{y}\right|=\sqrt{2}$

28. El ángulo que forman $\vec{u}$ y $\vec{v}$ es de 90°

29. Hay dos posibles soluciones: $x_1=\dfrac{4}{3}$ y $x_2=-\dfrac{3}{4}$.

30. Hay dos posibles soluciones: $\vec{a}_1=\left(-1,\sqrt{3}\right)$ y $\vec{a}_2=\left(2,0\right)$

31. Hay dos posibles soluciones: $\vec{a}_1=\left(\dfrac{-3+2\sqrt{3}}{2},\dfrac{-6-\sqrt{3}}{2}\right)$ y $\vec{a}_2=\left(\dfrac{-3-2\sqrt{3}}{2},\dfrac{-6+\sqrt{3}}{2}\right)$

32. $\operatorname{proy}_{\vec{u}}\left(\vec{v}\right)=\dfrac{9\sqrt{10}}{5}$

33. $\left|\vec{u}\cdot\vec{v}\right|=9\sqrt{5}$

34. $x=5,\ y=-14$

35. El punto simétrico de A con respecto a P es $A'\left(0,3\right)$.

36. a) 5 uds ; b) $2\sqrt{2}$ uds ; c) $81{,}87^{\circ}$; d) 7 uds^2

37. El área del triángulo es $32{,}5$ uds^2 y el ángulo correspondiente al vértice A es de 90°.

38. a) $z=\dfrac{3}{2}$; b) $z=-6$; c) $z=9$ y $z=-1$; d) $z=24+15\sqrt{3}$ y $z=24-15\sqrt{3}$